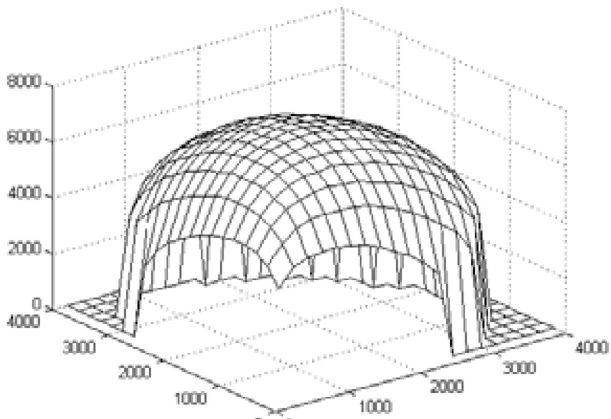
Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ им. В. А. ТРАПЕЗНИКОВА

С. А. Баркалов, К. С. Демченко, И. Б. Руссман

МОДЕЛИ АНАЛИЗА ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ОБЪЕДИНЕНИЙ НА БАЗЕ ФУНКЦИЙ КОББА-ДУГЛАСА



Москва 2000

УДК.517.9:519.81.

Баркалов С. А., Демченко К. С., Руссман И. Б. **Модели анализа деятельности производственных объединений на базе функций Кобба-Дугласа.**– М. 2000 (Препринт / Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова).

В работе рассматриваются вопросы образования объединений, структуры расчетов между членами объединений, предлагаются модели оптимизации их деятельности. Рассматриваемые модели используют нелинейные функции для представления производства. Рассматривается применение разработанного математического аппарата на примере строительного объединения.

Рецензент: д.т.н. А. В. Щепкин

Текст препринта воспроизводится в том виде, в котором представлен авторами.

Утверждено к печати Редакционным советом Института.

ВВЕДЕНИЕ

На текущий момент к рыночным условиям лучше всего адаптировались предприятия малого и среднего размеров. Такие предприятия нормально функционируют и производят продукцию, востребованную на российском рынке. Однако, в силу размеров предприятий этого сектора, полный цикл производства товара, попадающего к конечному потребителю, обычно проходит на нескольких предприятиях, передающих друг другу полуфабрикаты.

Результатом является интерес к проблемам создания производственных объединений, в частности, к проблемам взаиморасчетов между участниками таких объединений. При этом необходимо учитывать возможность сокрытия или умышленного искажения информации о результатах деятельности какого-либо члена объединения. Другой актуальной проблемой является выработка политики работы объединения исходя из целей и потребностей всего объединения в целом, а не только отдельных предприятий, составляющих его, или предприятия, реализующего итоговый продукт.

В работе рассматриваются вопросы образования объединений, структуры расчетов между членами объединений, учитывающие определенные типы искажения информации кем-либо из участников. Предлагаются различные схемы оптимизации деятельности объединения, основанные на максимизации объема выпускаемой продукции либо получаемой прибыли. В рассматриваемых моделях для моделирования процесса производства используются нелинейные производственные функции Кобба-Дугласа, являющиеся более гибкими по сравнению с обычно используемыми линейными функциями. Рассматривается применение разработанного математического аппарата на примере строительного объединения, производящего и реализующего силикатный кирпич.

1. ПОНЯТИЕ ОБЪЕДИНЕНИЯ, ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ОБЪЕДИНЕНИЙ

1.1. Понятие объединения, виды объединений

Объединение предприятий – единый производственно-хозяйственный комплекс взаимосвязанных хозяйствующих субъектов, основанный на технологической общности процессов производства, однородности выпускаемой продукции, территориальной близости объединяемых субъектов хозяйствования, развитии специализации, кооперирования, комбинирования производства и централизации управления.

В мировой хозяйственной практике известны перечисленные ниже виды объединений, соответствующие российскому законодательству.

1. <u>Ассоциация</u>: добровольное объединение предприятий с целью координации деятельности. Форма объединения – соглашение о сотрудничестве. Создается с целью совместной реализации проектов, получения прибыли. Основа организации отношений – договорная. Участники соблюдают устав, принимают участие в управлении, несут ответственность за неисполнение решений ассоциации, имеют право получать долю прибыли, в соответствии с вложенным капиталом.

   Достоинства:

   - добровольность вхождения предприятий;
   - участники могут участвовать в деятельности других объединений;

- увеличение мощности системы;
- заинтересованность в результатах деятельности.

Недостатки: при утрате участниками заинтересованности в продолжении деятельности ассоциация ликвидируется.

2. Концерн: межотраслевой комплекс самостоятельных, но связанных общностью производственно-хозяйственных и экономических интересов предприятий. Форма объединения – совместное предприятие. Создается из-за необходимости более тесного кооперирования различных производств. Стороны взаимосогласованно осуществляют производственно-хозяйственную деятельность, подчиняются специальному аппарату управления (дирекции).

   Достоинства:
   - увеличение мощности системы;
   - уменьшение затрат на содержание науки;
   - обеспечение высокого качества продукции;
   - высокая восприимчивость к научно-техническому прогрессу.

   Недостатки:
   - снижение конкуренции внутри концерна;
   - возможен монополизм в ценообразовании выпускаемой продукции.
3. Корпорация: объединение предприятий, создаваемое с целью защиты каких-либо интересов хозяйствующих субъектов. Форма объединения – соглашение о сотрудничестве. Создается с целью экономической, социальной и правовой защиты прав и интересов входящих в корпорацию участников.

Взаимоотношения строятся на долевой собственности участников, самостоятельности юридического статуса.

Достоинства:

- непрерывность существования;
- высокое обеспечение стабильных объемов производства;
- высокая заинтересованность в стабильности каждого из партнеров;
- возможность диверсификации производства;
- высокая выживаемость на рынке.

Недостатки:

- двойное налогообложение;
- низкая восприимчивость к быстрому перепрофилированию производства;
- спад производства при наличии лимитизирующего звена.

4. Синдикат: совокупность предприятий, объединенных с целью централизации функции обеспечения ресурсами и сбытом продукции. Форма объединения – соглашение о сотрудничестве по отдельным видам деятельности. Создается с целью централизации оптового сбыта продукции, закупки сырья и планирования торговых операций. Участники сохраняют юридическую и производственную самостоятельность, но теряют коммерческую независимость.

   Достоинства:

   - централизация коммерческой деятельности;
   - уменьшение затрат за счет оптовых покупок.

   Недостатки:

   - узкая специализация;

- отсутствие возможности воздействия на производственную деятельность.

5. Трест: объединение предприятий, при котором осуществляется сильная централизация управления и участники полностью утрачивают самостоятельность. Форма объединения – передача юридического права держателю контрольного пакета акций. Причина возникновения – в возможности сконцентрировать основное производство на наиболее оснащенных предприятиях, с целью обеспечения сырьем, топливом. Участники полностью утрачивают производственно-коммерческую самостоятельность и подчиняются создателю треста. Прибыль распределяется согласно долевому участию.

   Достоинства:
   - концентрация капитала;
   - единая техническая политика.

   Недостатки:
   - жесткая централизация управленческих функций.

6. Консорциум: временное объединение участников на период достижения поставленной задачи. Форма объединения – соглашение о сотрудничестве. Создается с целью совместного проведения крупных операций по реализации проектов, для получения высоких прибылей. Участники полностью сохраняют свою самостоятельность, но в рамках поставленной цели консорциума подчиняются совместно выбранному руководству.

   Достоинства:
   - полная самостоятельность участников;

- увеличение мощности системы;
- заинтересованность в результатах деятельности.

Недостатки:

- прекращение деятельности после выполнения поставленной задачи.

7. Холдинг: держательная компания, для которой остальные участники являются дочерними или зависимыми. Форма объединения – соглашение о поглощении мелких предприятий более крупными и создание дочерних предприятий, либо соглашение о слиянии, либо соглашение о присоединении. Создается с целью решения задач надежного и достаточно прибыльного вложения средств на основе целенаправленной консолидации акций торговых, промышленных, транспортных и других структур. Холдинг – это материнская компания и группа ее дочерних фирм, объединенных общим владением. Учредительская деятельность материнского предприятия заключается в создании или приобретении дочерних фирм. Контроль над дочерними фирмами со стороны головного предприятия достигается на основе владения значимым пакетом акций.

   Достоинства:

   - функциональное взаимодействие предприятий;
   - эффективность функционирования;
   - повышение прибыльности;
   - устойчивая общая доходность.

   Недостатки:

   - возможность нарушений антимонопольного законодательства

- злоупотребление управленческими функциями;
- возможность искусственного поддержания нерентабельных предприятий.

Несколько особняком стоит сравнительно недавно появившаяся в мире форма объединения “под торговую марку” или “ноу-хау”.

8. Франчайзинговая система: объединение предприятий крупного и мелкого предпринимательства, основанная на франчайзинге. Соглашение о сотрудничестве заключается по отдельным видам деятельности. Создается с целью реализации продукции через сеть мелких фирм, рекламы своей продукции, для проведения маркетинговых исследований. Взаимоотношения строятся на основе франчайза - договора, заключенного между крупной фирмой (франчайзером) и сетью мелких фирм (франчайзи), в соответствии с которыми франчайзер обязуется поставлять франчайзи свои товары и услуги. За это франчайзи обязуется предоставлять франчайзеру услуги реализации товаров, менеджмента и маркетинга.

   Достоинства:
   - высокое качество товаров;
   - стандартизация продукции и услуг;
   - расширение коммерческих возможностей;
   - учет запросов покупателей;
   - низкие цены.

   Недостатки:
   - крупные компании “франчайзеры” отказываются от небольших контрактов;
   - франчайзи ограничены в возможности получения права “ноу-хау”;

- ограничение самостоятельности мелких фирм.

9. ФПГ: объединение научного, производственного, финансового и коммерческого потенциалов входящих в группу хозяйственных единиц. Форма объединения – соглашение о поглощении мелких предприятий либо соглашение о слиянии либо соглашение о присоединении. Создается с целью технологической или экономической интеграции для реализации инвестиционных и других проектов, направленных на повышение конкурентоспособности, расширения рынков сбыта, повышение эффективности производства. Взаимоотношения складываются на основе многостороннего договора участников ФПГ, который определяет механизм принятия и исполнения управленческих решений, а также правомочия совета управляющих ФПГ.

   Достоинства:

   - концентрация капитала;
   - централизация управления;
   - функциональное взаимодействие предприятий;
   - повышение прибыли у каждой фирмы;
   - устойчивая доходность.

   Недостатки:

   - возможность нарушения антимонопольного законодательства;
   - злоупотребление управленческими функциями;
   - отсутствие или недостаток нормативной базы.

Таким образом, существует два основных типа объединения предприятий.

- Объединение предприятий, носящее договорную форму. В его основе лежит межфирменное соглашение. В договорных объединениях стороны не создают новую компанию совместного владения для осуществления совместной деятельности и не осуществляют перераспределение акций существующих предприятий.
- Объединение предприятий, носящее форму совместного предприятия. Такое объединение создается двумя или несколькими компаниями, по крайней мере, одна из которых является функционирующей, желающей расширить свою деятельность на постоянной основе. Право собственности в создаваемом объединении делится между участниками в соответствии с вложенным капиталом.

1.2. Графовые задачи оптимизации деятельности объединений

При моделировании деятельности объединений первого типа особый интерес представляет задача определения выбора контрагентов предприятия, максимизирующих целевую функцию того предприятия, которое заказывает расчет (также называемого фирмой-оператором). В таких случаях может использоваться подход, описанный в работах В.Н. Буркова и других авторов [8, 9].

Вся предметная область представляется в виде ориентированного графа, вершинами которого являются экономическими агентами (предприятиями, организациями, государством, другими государствами, банками, фондами и пр.), дуги указывают на возможность передачи тех или иных ресурсов от одного агента другому. Решение задачи оптимизации, построенной на основании такого графа, может быть сведена к решению задачи оптимальной циркуляции в графе с усилениями в дугах или к определению оптимального потока на сети с усилениями в дугах.

Решением такой задачи может быть схема, при которой фирма-оператор не тратит своего ресурса, то есть фактически является посредником. Такие схемы являются спекулятивными и обладают повышенным риском. Отдельно от таких схем стоит рассматривать так называемые продуктовые схемы обмена, в которой все участвующие в обмене фирмы (включая фирму-оператора) получают какой-либо ресурс в обмен на свой. Таким схемам соответствует простой путь в сети, то есть путь, при который каждая вершина входит только один раз.

Полученная задача эквивалентна задаче поиска пути максимальной длины и является NP-трудной комбинаторной задачей, решение которой находится перебором всех простых путей. При этом для использования алгоритмов поиска максимального потока в сети необходимо преобразовать сеть так, чтобы она не содержала контуров, что в ряде случаев может быть проделано при помощи процедуры правильной нумерации вершин графа без контуров.

Как расширение описанной задачи можно использовать модели, учитывающие риск (за счет выделения классов дуг в графе) и управляющие риском за счет применения различных компенсационных мер, на проведение которых необходимо осуществлять затраты.

Результатом решения подобных задач является путь, который определяет схему обмена ресурсами между контрагентами, максимизирующую маргинальную прибыль (или доход) фирмы-оператора. При этом некоторые экономические агенты могут быть исключены из итоговой обменной схемы. В предлагаемой работе считается, что структура взаимоотношений между участниками обмена уже задана, и основное внимание уделяется построению динамической модели обмена ресурсами с дискретным временем, которая учитывает структуру производства и возможность замены одного ресурса другим. Такой подход может так же использоваться для исследования и оптимизации деятельности крупных предприятий, в которых вместо экономических агентов рассматриваются цеха, передающие материалы и полуфабрикаты по производственной цепочке (или, точнее, производственному дереву).

1.3. Использование относительных величин

При анализе деятельности объединений второго типа, то есть объединений с заранее заданной структурой, основными задачами является рассмотрение производства, механизма передачи ресурсов между подразделениями и структуры взаимных расчетов и дележа прибыли, а также установление взаимосвязи между ними. Для учета особенностей производства удобно использовать относительные величины [2]. Такими величинами являются собственные затраты и стоимость покупаемых на стороне компонент на одно изделие, определяемые для каждого участника производственного процесса. При этом объем производства обычно считается фиксированным, и потому зависимость этих величин от него не учитывается, а при необходимости предлагается проводить расчет при нескольких различных значениях наборов коэффициентов, соответствующих различным объемам производства.

Передача продукции между производственными звеньями осуществляется по внутренним ценам, назначаемым так, чтобы каждый участник получал прибыль немедленно при передаче продукции следующему предприятию, либо по себестоимости. В последнем случае получение прибыли будет осуществляться путем перераспределения дохода дилера, то есть предприятия или подразделения, стоящего последним в цепочке и осуществляющим реализацию конечного продукта.

Очевидно, что с ростом прибыли одного из участников договора уменьшаются прибыли остальных участников, то есть индивидуальные интересы каждого предприятия противоречат интересам остальных предприятий. Справедливый механизм дележа прибыли должен стимулировать эффективное производство. Для этого могут решаться задачи максимизации общей равной нормы прибыли и общей равной собственной нормы прибыли, которые являются задачами дробно-линейного программирования. Задачи решаются для внутренних цен и распределения прибыли дилера. Системы ограничений, из-за использования относительных величин, будут линейными, благодаря чему возможно доказать существование решений рассматриваемых задач.

Поскольку денежные выплаты (результаты дележа прибыли) отстают во времени от производства, в каждой из задач при помощи введении темпов дисконтирования может учитываться задержка платежей. Такое усложнение модели не изменяет класс решаемых в результате оптимизационных задач. Для этих задач также доказано существование решения.

В предлагаемой работе используется схожий подход к возмещению затрат и дележу прибыли, хотя алгоритмы предлагаются несколько отличные от использованных С.В. Жаком. Кроме того, построенная модель оперирует количествами ресурсов, то есть нет необходимости считать затраты на единицу выпускаемой продукции фиксированными. Такой отход от относительных величин несколько усложняет модель, но позволяет учесть возможность замены одного ресурса на другой. Эта замена зачастую может осуществляться не напрямую, а через продажу одного из ресурсов для получения денежных средств на покупку другого.

Кроме того, поскольку для моделирования производства используются производственные функции Кобба-Дугласа, становится возможным учесть убывающую и возрастающую отдачу производства, в то время, как модели, основанные на работе с относительными величинами, либо предполагают наличие постоянной отдачи производства, либо вообще считают объем производства заданным. Кроме того, оперирование переменными количествами выпуска продукции и полуфабрикатов каждым из участников объединения позволяет построить динамическую модель с дискретным временем, в которой затраты на последующем этапе равны возмещениям затрат на данном этапе.

Необходимо отметить, что для реального принятия решения необходимо использования целого комплекса моделей, относящихся к анализу деятельности объединений. Так, например, первой должна решаться задача об оптимальном выборе партнеров для заключения договора, далее – задачи оптимизации производства и структуры взаимных расчетов между членами объединения.

Полученные результаты также не стоит считать истиной в последней инстанции, они лишь должны служить дополнительной информацией для обеспечения деятельности лица, принимающего решения.

2. МОДЕЛИ ОБРАЗОВАНИЯ ОБЪЕДИНЕНИЙ С ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ КОББА-ДУГЛАСА

2.1. Использование производственных функций Кобба-Дугласа

Многие экономические модели исходят из предпосылки, что производственные функции в системе линейны или квазилинейны [1]. Так, в балансовой модели Леонтьева они имеют вид $y_k = \min\limits_{1 \le i \le n}\left(\frac{x_i}{a_{ki}}\right)$. В других моделях все расчеты производятся на одну единицу выпуска [2], что предполагает как минимум постоянность отдачи производственных функций, а зачастую опять же подразумевается их линейность. Класс подобных функций описывает далеко не все производственные процессы. Производственные функции Кобба-Дугласа вида $y_k = k_k \prod\limits_{i \ne k} x_i^{a_{ki}}, \forall i,k = \overline{1,n}; i \ne k \;\; a_{ki} \ge 0$ являются более гибкими в представлении производства. Можно спорить, что многие ресурсы в производстве не являются взаимозаменяемыми, следовательно, эластичность замены соответствующих ресурсов должна быть равна 0. Однако, если предположить, что каждое подразделение обладает определенной экономической независимостью и может продавать одни ресурсы и на вырученные деньги докупать другие, то любая пара ресурсов становится взаимозаменяемой. При этом подразделения, участвующие в производстве, скорее являются членами объединения предприятий, нежели отдельными цехами.

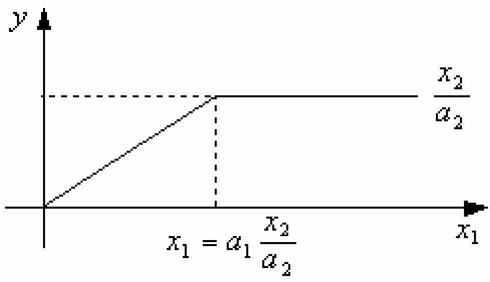


Рис. 2.1.1. Производственная функция затраты-выпуск.

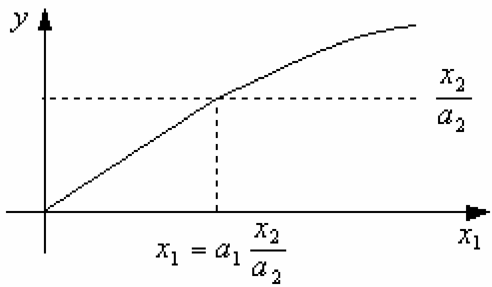


Рис. 2.1.2. Производственная функция при возможности замены ресурсов через куплю-продажу.

Рассмотрим пример. Пусть имеется производственная функция типа затраты-выпуск с двумя ресурсами $y = \min\left(\frac{x_1}{a_1}; \frac{x_2}{a_2}\right)$, где x_1 – основное сырье, x_2 – прочие денежные средства, необходимые для производства продукта y, a_1 – затраты основного сырья на одну единицу выпускаемой продукции, a_2 – прочие денежные затраты на одну единицу выпускаемой продукции. При достаточном обеспечении деньгами можно считать, что выпуск итогового продукта y пропорционален количеству имеющегося ресурса x_1. При фиксированном x_2 имеем картину, представленную на рис.2.1.1. Если же подразделение само может осуществлять продажу излишков одних ресурса и докупать недостающее количество других ресурсов, то y, как функция зависящая от x_1, не будет ограничен сверху, что отображено на рис.2.1.2. Причем вид зависимости y от x_1 при $x_1 \geq a_1 \frac{x_2}{a_2}$ определяется ценами продажи x_1, покупки x_2 и рыночной ситуацией в целом. В такой форме производственная функция может быть хорошо представима в форме Кобба-Дугласа. Кроме того, при этом упрощается моделирование – часть расчетов по купле-продаже ресурсов скрыта в самой форме производственной функции, коэффициенты которой вычисляются на основании имеющейся статистики и / или экспертных оценок и прогнозных данных. При получении результатов остается вычислить количества докупаемых / продаваемых ресурсов.

Далее рассматриваются иерархические модели обмена для производства, в котором производственные функции для каждого звена (организации либо цеха) являются производственными функциями Кобба-Дугласа. В таких моделях предполагается, что итоговый продукт реализует подразделение, являющееся вершиной дерева производственных процессов. Одним из основных вопросов в таком случае является вопрос разделения выручки между участниками производства. Рассматриваются различные схемы распределения прибыли, в зависимости от того, являются ли звенья производства цехами одного предприятия или практически независимыми организациями, передающими друг другу продукцию по “внутренним ценам”. На основании схемы распределения доходов пропорционально эффективности производства можно рассмотреть модель оптимизации, максимизирующую эффективность работы всех подразделений одновременно. В результате распределения выручки и вложения полученных денежных ресурсов в производство в следующем временном периоде, появляется возможность исследования динамики системы. Для одного из способов распределения выручки были получены условия существования положения экономического равновесия, показана сходимость процесса к этому положению.

2.2. Сбор статистики, необходимой для определения коэффициентов производственной функции

При использовании в моделях производственных функций одним из самых важных аспектов применения полученных результатов является определение коэффициентов функций. Определение коэффициентов производственных функций предлагается производить при помощи метода наименьших квадратов по имеющейся статистике. При некорректном сборе статистики или некорректном ее использовании (например, введении на основании непроверенных гипотез ограничений, связанных с отдачей производства) возможно получение ложных результатов. Следующая часть работы посвящена проблемам, связанным со сбором статистических данных, построением и решением эконометрических моделей оценки коэффициентов.

Рассмотрим различные варианты получения данных, необходимых для определения коэффициентов производственной функции. Статистические данные, используемые при оценке коэффициентов, прежде всего состоят из реальных данных о затратах на производство и собственно выпуске продукции. В ряде случаев статистика дает множество точек, лежащих в одной области, что не позволяет раскрыть сущность и структуру производственного процесса. В таких ситуациях необходимо дополнять статистику экспертными и прогнозными данными о выпуске продукции при затратах ресурсов, значительно отличающихся от имеющихся затрат.

Если в создаваемой модели разрешена возможность замены ресурсов через куплю-продажу, то особую роль в формировании статистики получают экспертные оценки замены ресурсов в рыночной ситуации. Для облегчения работы эксперта могут решаться задачи об оптимальной замене одного ресурса на другой через куплю-продажу ресурсов, где оптимальность рассматривается с точки зрения максимизации выпуска итогового продукта при заданных количествах ресурсов на входе. Такая задача может решаться через нахождение количества наборов комплексного ресурса.

Проблема, с которой можно столкнуться при применении всех этих методов получения данных одновременно, заключается в разнородности полученных данных по способу их возникновения. Далее считаем, что статистические данные, принадлежат одному процессу генерации данных и, как следствие этого, ошибки в статистике независимы и имеют одинаковое распределение со средней 0 и дисперсией σ^2, то есть возможно использование этих данных в методе наименьших квадратов.

2.3. Определение коэффициентов производственных функций, проверка гипотез о виде коэффициентов

При оценке коэффициентов может показаться разумным использовать нелинейный метод наименьших квадратов и определять коэффициенты для собственно производственной функции. С точки зрения эффективности и точности расчета этот метод является плохим вариантом, поскольку, преобразовав производственную функцию, можно использовать линейный метод наименьших квадратов для оценки коэффициентов. Для этого необходимо взять натуральный логарифм от имеющихся данных о затратах ресурсов и выпуске продукции и осуществить переход от оценки коэффициентов в нелинейных уравнениях вида $y_k = k_k \prod_{i \neq k} x_i^{a_k}, \forall k = \overline{1,n}$ к оценке коэффициентов в линейных уравнениях $\ln(y_k) = \ln(k_k) + \sum_{i \neq k} a_{ki} \ln(x_i), \forall k = \overline{1,n}$. Возможность использования линейного метода наименьших квадратов при оценке коэффициентов производственных функций Кобба-Дугласа дает существенное преимущество по сравнению с использованием других производственных функций.

При определении коэффициентов производственной функции статистическим путем очень интересным вопросом является вопрос об отдаче производства. Очевидно, что при статистическом определении коэффициентов производственной функции невозможно получить строгое выполнение условия $\sum_i a_i = 1$. В то же время в ряде случаев наличие постоянной отдачи производства приводит к получению результатов, отличных от результатов для возрастающей или убывающей отдачи производства. Если предполагается наличие постоянной отдачи производства, то можно проводить вычисление коэффициентов методом наименьших квадратов с ограничением. В таком случае один из коэффициентов выражается через остальные (например, $1 - \sum_{i \neq n} a_i = a_n$), статистические данные, участвующие в модели, соответствующим образом группируются и происходит вычисление $n-1$ коэффициента вместо исходных n. У подобного подхода имеется значительный недостаток: если предположение о постоянной отдаче производства неверно, то будут вычислены ошибочные коэффициенты и погрешность в представлении производственного процесса при помощи функции Кобба-Дугласа будет велика не из-за некорректно выбранной формы представления, а из-за насильно введенного ограничения. Поэтому проводить оценку коэффициентов методом наименьших квадратов с ограничением можно только после того, как будет протестирована и принята соответствующая гипотеза об отдаче производства. Если же гипотеза не будет принята, то либо предположение о постоянной отдаче производства несостоятельно, либо форма производственной функции не близка к форме Кобба-Дугласа.

При тестировании соответствующей гипотезы предлагается использовать тест Вальда [6] на единственное линейное ограничение $Ra = q$. В нашем случае R является n-мерным вектором вида $(1, ..., 1)$, $q = 1$. Для проведения теста вычисляется статистика T, имеющая вид

$$T = \frac{R\hat{a} - q}{\sqrt{s^2 R \left(X^T X\right)^{-1} R^T}} \sim t_{m-n} \tag{2.3.1}$$

где $\hat{a}$ – вектор оцененных параметров, s – несмещенная оценка среднеквадратического отклонения в методе наименьших квадратов, X – матрица статистических данных, по которым производится вычисление по методу наименьших квадратов (следовательно, $X^T X$ имеет размерность $n \times n$), m – количество наблюдений, n – размерность вектора оцениваемых коэффициентов. Такая статистика асимптотически стремится к распределению Стьюдента с m – n степенями свободы, то есть при больших m могут использоваться таблицы распределения Стьюдента для определения статистики T, которая попадает (или не попадает) в построенный интервал принятия гипотезы.

Альтернативным способом тестирования гипотезы является вычисление коэффициента правдоподобия. Данный метод имеет наибольшую силу, то есть с наибольшей надежностью позволяет отвергнуть ложную гипотезу. Кроме того, данный тест позволяет проверять нелинейные гипотезы. Для проведения теста вычисляется T-статистика вида

$$T = \frac{1}{qs^2}\left(SSR\left(\tilde{\beta}\right) - SSR\left(\hat{\beta}\right)\right) = \frac{\left(SSR\left(\tilde{\beta}\right) - SSR\left(\hat{\beta}\right)\right) / q}{SSR\left(\hat{\beta}\right) / (m-n)} \sim F_{(q,\, m-n)} \tag{2.3.2}$$

В данном выражении $\hat{\beta}$ – вектор коэффициентов, оцененный без ограничений и $SSR\left(\hat{\beta}\right)$ – сумма квадратов вычетов, полученных для данного вектора, $\tilde{\beta}$ – вектор, оцененный с q ограничениями и $SSR(\tilde{\beta})$ – соответствующая ему сумма квадратов вычетов. Такая статистика асимптотически стремится к распределению Фишера с q и $m-n$ степенями свободы.

Кроме перечисленных тестов возможно тестирование производственных функций на возрастание или убывание отдачи, однако такие тесты обычно не выполняются по схемам Вальда, поскольку введение ограничений в эконометрическую модель приводит к нелинейным зависимостям. В таких случаях при вычислении коэффициента правдоподобия помимо метода наименьших квадратов, использующегося для оценки эконометрической модели без ограничений, используется нелинейный метод наименьших квадратов для оценки коэффициентов модели с ограничениями.

Помимо описанного выше метода определения коэффициентов производственной функции по статистике затрат ресурсов и выпуска продукции, возможно также определение коэффициентов производственной функции по статистике цен p_i на ресурсы x_i и выпуску продукта y**.** Возьмем функцию стоимости произведенного продукта y, обозначим ее Ф. Функция стоимости произведенного продукта, получаемая для производственной функции Кобба-Дугласа, имеет вид:

$$\Phi = \gamma \cdot y^{\frac{1}{r}} \cdot \prod_i p_i^{\frac{a_i}{r}} \tag{2.3.3}$$

где $r = \sum_i a_i$ – отдача производства, $\gamma = r\left(k\prod_i a_i^{a_i}\right)^{-\frac{1}{r}}$ [5]. Данная функция удовлетворяет условию постоянной отдачи в ценах, выполнение которого необходимо для того, чтобы функция считалась функцией стоимости:

$$\Phi(\lambda p) = \gamma \cdot y^{\frac{1}{r}} \cdot \prod_i (\lambda p_i)^{\frac{a_i}{r}} = \gamma \cdot y^{\frac{1}{r}} \cdot \lambda^{\frac{\sum_i a_i}{r}} \cdot \prod_i p_i^{\frac{a_i}{r}} = \lambda^{\frac{\sum_i a_i}{r}} \Phi(p) = \lambda \Phi(p).$$

Поскольку условие постоянной отдачи в ценах выполнено, статистические данные, собранные в различном уровне цен, не будут приходить в противоречие друг с другом, что очень немаловажно в условиях экономики с высоким уровнем инфляции, каковой и является современная российская экономика.

Соответственно проводившимся ранее рассуждениям переходим к оценке коэффициентов линейного уравнения методом наименьших квадратов, для чего логарифмируем функцию стоимости и получаем линейную функцию $\ln\Phi = \ln\gamma + \frac{1}{r}\ln y + \sum_i \frac{a_i}{r}\ln p_i$.

Отметим, что при члене $\ln y$ стоит коэффициент $\beta = \frac{1}{r}$. При постоянной отдаче производственной функции этот коэффициент равен 1. Для того, чтобы протестировать гипотезу о постоянной отдаче производственной функции при данном способе оценки коэффициентов производственной функции, можно провести тест Вальда следующего вида [6]. Проверяется гипотеза о равенстве коэффициента, вычисленного по методу наименьших квадратов, конкретному значению $\beta = 1$ (что эквивалентно выполнению $\frac{1}{\beta} = \sum_i a_i = 1$). При проверке такой гипотезы вычисляется T – статистика вида $T = \frac{\hat{\beta} - 1}{\sqrt{\hat{Var}(\hat{\beta})}} \sim t_{m-n}$, имеющая распределение Стьюдента с m – n степенями свободы, где m – количество наблюдений, n – размерность вектора оцениваемых коэффициентов.

Выявив тем или иным способом коэффициенты производственных функций, можно переходить к собственно рассмотрению задач взаимодействия предприятий внутри объединения.

2.4. Постановка задачи образования объединения

Рассматривается иерархическая модель, состоящая из ряда подразделений, вырабатывающих продукцию и передающих результат производства далее. Последнее в цепочке подразделение реализует произведенный продукт, покрывает производственные расходы предыдущих подразделений и распределяет полученную прибыль. Помимо передаваемого продукта каждое подразделение получает некоторые вложения ресурса извне (на рис. 2.4.1 – x_1, x_2, x_3) - например, денежные вложения.

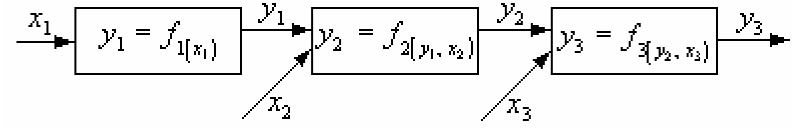


Рис. 2.4.1. Пример производственной цепочки.

Задача о распределении прибыли и определении внутренних и договорных цен на продукцию (на рис. 2.4.1 – y_1, y_2, y_3) в производственной цепочке рассматривалась С.В. Жаком [2]. При этом рассматривались прибыль на одну единицу продукции и все расчеты параметров и оптимизация проводилась также для одной единицы продукции, что подразумевает линейность производства при переходе к рассмотрению общего количества выпуска. Если считать производство нелинейным, становится невозможно рассматривать модель для одной единицы выпускаемой продукции.

Предположим, что имеем дело с иерархической производственной схемой (пример которой представлен на рис. 2.4.1), в которой имеется один выпускаемый продукт y_n (на рисунке – y_3) и несколько промежуточных производств (на рисунке представлены прямоугольниками), принимающих от нижестоящих подразделений полуфабрикаты в количестве $y_j, j \neq n$, вкладывающих дополнительно суммы $x_i, i = \overline{1, n}$ и производящих количество y_i полуфабриката или готовой продукции. Итоговая продукция y_n продается по цене p. При этом сумма затрат всего объединения на выпуск продукции равна сумме внешних затрат $\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Для представленной схемы (рис. 2.4.1) производство описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = f_{1(x_1)} \\ y_2 = f_{2(y_1, x_2)} \\ y_3 = f_{3(y_2, x_3)} \end{cases}.$$

Осуществляя подстановки одних уравнений в другие, получаем зависимость производства y_n от вложений x_i (так, для выписанной системы уравнений $y_3 = f_3\left(f_2(f_{1(x_1)}, x_2), x_3\right)$). Если задаться конкретным видом производственных функций, может быть получено выражение общего вида для количества производимого продукта y_n. Так, если все производства в иерархии описываются производственными функциями Кобба-Дугласа вида

$$y_i = k_i x_i^{a_i} \prod_{t=1}^{m_t} y_i^{t\, a_t^i} \; \forall i = \overline{1,n} \tag{2.4.1}$$

то итоговая зависимость имеет вид

$$y_n = k \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} \tag{2.4.2}$$

(где a_i и k зависят от структуры иерархии, причем если $\sum_t a_t^i = 1 \forall i = \overline{1,n}$, то $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, если $\sum_t a_t^i < 1 \forall i = \overline{1,n}$, то $\sum_{i=1}^{n} a_i < 1$, если $\sum_t a_t^i > 1 \forall i = \overline{1,n}$, то $\sum_{i=1}^{n} a_i > 1$), то есть производство итогового продукта описывается опять же производственной функцией Кобба-Дугласа от вложений при производстве всех полуфабрикатов, если все производственные функции подразделений имеют один и тот же вид отдачи (постоянный, возрастающий или убывающий), то суммарная производственная функция имеет тот же вид отдачи. Таким образом, получаемая объединением прибыль выражается как

$$pk \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} - \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2.4.3}$$

Может быть рассмотрена задача, в которой входящими потоками на каждом частичном производстве являются не денежные вложения x_i и полуфабрикаты $y_i^t, t=\overline{1,m_i}$ (см. производственную функцию из (2.4.1)), а внешние вложения ресурсов $x_i^s, s=\overline{1,r_i}$, один из которых по-прежнему может быть денежным ресурсом, описывающим размеры вложения денежных средств извне в производство i-го полуфабриката, и полуфабрикаты $y_i^t, t=\overline{1,m_i}$. Цены входных ресурсов равны p_i^s. Тогда производственная функция, характеризующая выпуск i-го полуфабриката, имеет вид:

$$y_i = k_i \prod_{s=1}^{r_i} x_i^{s\,a_{1i}^s} \prod_{t=1}^{m_t} y_i^{t\,a_{2t}^i} \; \forall i=\overline{1,n} \tag{2.4.4}$$

Проведя свертку производственных функций аналогично проводившимся ранее рассуждениям, произведя замену индексов в x_i^s для избежания двойной индексации, получаем полный аналог (2.4.2): $y_n = k\prod_{j=1}^{n} x_j^{a_j}$, при этом функция прибыли объединения имеет вид, отличный от (2.4.3):

$$F_{(x)} = pk\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{2.4.5}$$

2.5. Оптимизация деятельности объединения

Очевидно, в интересах объединения максимизировать эту прибыль. Получаем задачу безусловной оптимизации

$$F_{(x)} = pk\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} - \sum_{i=1}^{n} x_i \to \max_{x_1,\dots,x_n}.$$

Данная задача имеет смысл лишь при выпуклости функции $F_{(x)}$, кроме того, для получения положительной прибыли (отсутствия убытка) требуется, чтобы $pk\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} - \sum_{i=1}^{n} x_i > 0$.

Если производственная функция (2.4.2) является производственной функцией с возрастающей отдачей, то $F_{(x)}$ вогнута и, следовательно, множество, на котором $pk\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} - \sum_{i=1}^{n} x_i > 0$ всегда непусто и неограниченно. При этом получаем неограниченный рост функции цели $F_{(x)}$, что означает возможность бесконечного роста выпуска, ограниченного лишь какими-либо дополнительными экономическими или экологическими условиями, не учитываемыми в данной модели. Прибыль при этом будет возрастать пропорционально $x^a, a > 1$.

Рассмотрим случай, когда производственная функция (2.4.2) является производственной функцией с убывающей отдачей (при этом $F_{(x)}$ будет выпуклой функцией, следовательно, если у нее существует подозрительная на экстремум точка, то это и будет искомый максимум прибыли или минимум убытка).

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{kpa_i}{x_i}\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} - 1 = 0 \qquad \forall i = \overline{1,n} \tag{2.5.1}$$

откуда

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}\right)^{\sum_{i=1}^{n} a_i} = \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}}{\prod_{i=1}^{n} (kpa_i)^{a_i}} \qquad (2.5.2)$$

Из (2.5.2), выражая $\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}$ и подставляя полученное выражение в (2.5.1), получаем выражение для x_i:

$$x_i = (kp)^{\frac{1}{1-\sum_{k=1}^{n} a_k}} a_i \prod_{j=1}^{n} a_j^{\frac{a_j}{1-\sum_{k=1}^{n} a_k}} \qquad \forall i = \overline{1,n} \qquad (2.5.3)$$

Отметим, что для производственных функций с постоянной отдачей ($\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$) из (2.5.2) следует, что при $\prod_{i=1}^{n} (kpa_i)^{a_i} = kp\prod_{i=1}^{n} a_i^{a_i} = 1$ мы имеем бесконечное множество оптимальных точек (максимумов функции $F_{(x)}$ из (2.4.3)).

В случае, когда входящий поток денежного ресурса на каждом частичном производстве заменяется на внешние вложения ресурсов с ценами входных ресурсов p_i^s, аналогично ранее проводившимся рассуждениям, решая оптимизационную задачу,

$$F_{(x)} = pk\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max_{x_1,\dots,x_n}$$

полученную из (2.4.5). Из этой задачи получаем следующие вложения ресурсов x_i, при которых достигается максимум прибыли (минимум убытков) объединения:

$$x_i = (kp)^{\frac{1}{1-\sum_{k=1}^{n} a_k}} \frac{a_i}{p_i} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{a_j}{p_j} \right)^{\frac{a_j}{1-\sum_{k=1}^{n} a_k}} \quad \forall i = \overline{1,n} \qquad (2.5.4)$$

Аналогично проводившимся ранее рассуждениям, задача имеет смысл лишь для производственных функций с убывающей отдачей.

2.6. Исследование структуры множества прибыли.

Рассмотрим структуру множества, на котором производственная функция с убывающей отдачей имеет положительную прибыль (далее будем называть это множество множеством прибыли). Рассмотрение проведем на численном примере, построенном для схемы, представленной на рис. 2.4.1. В этом случае удается визуально отобразить границы и построить сечения множества прибыли в пространстве затрат денежных ресурсов x_1, x_2, x_3 – $\Re^3$. Для облегчения вычислений коэффициенты производственных функций возьмем кратными 2.

<u>Пример</u>. Пусть имеется некоторая система из трех последовательных звеньев, представленная на рис. 2.4.1. Пусть соответствующие производственные функции имеют вид:

$$\begin{cases} y_1 = 4\sqrt{x_1} \\ y_2 = 2\sqrt{y_1 x_2} \\ y_3 = 2\sqrt{y_2 x_3} \end{cases},$$

отпускная цена итоговой продукции p = 1. Тогда целевая функция (2.4.3) имеет вид $F_{(x)} = 4x_1^{\frac{1}{8}} x_2^{\frac{1}{4}} x_3^{\frac{1}{2}} - x_1 - x_2 - x_3$. Структура множества точек (количеств вложений x), при которых имеется положительная прибыль для всего объединения ($F_{(x)} > 0$), для производственной функции с убывающей отдачей представлена на рис. 2.6.1 – 2.6.3.

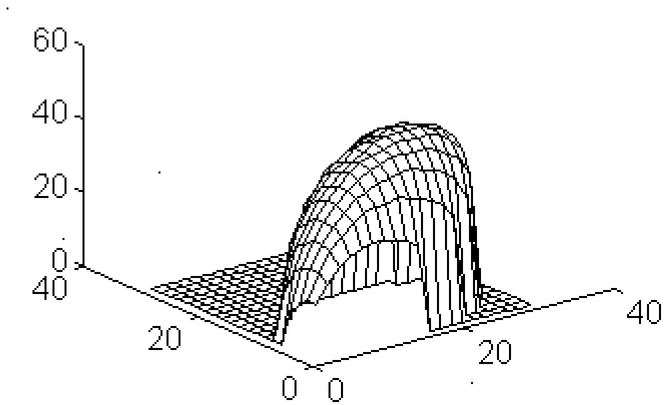


Рис. 2.6.1. Верхняя граница множества прибыли.

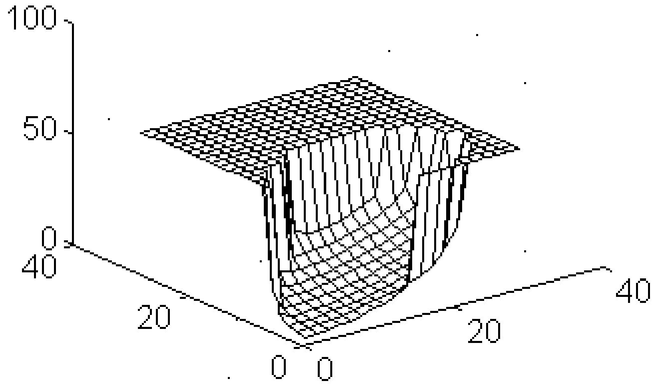


Рис. 2.6.2. Нижняя граница множества прибыли.

Как видно по рисункам, данное множество обладает “хорошей” структурой – оно выпукло, ограничено и, следовательно, удовлетворяет требованиям, предъявляемым численными методами решения оптимизационных задач.

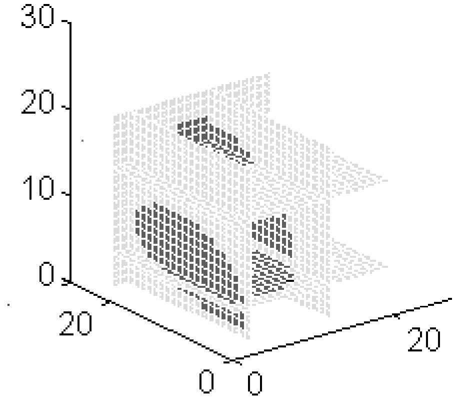


Рис. 2.6.3. Сечение множества прибыли.

Воспользовавшись полученными теоретическими результатами, найдем точку выпуска, обеспечивающую максимальную прибыль для рассматриваемой системы. Имеем $\dfrac{1}{1-\sum\limits_{k=1}^{3} a_k} = 2^3, \prod\limits_{j=1}^{3} a_j^{\frac{a_j}{1-\sum_{k=1}^{3} a_k}} = \dfrac{1}{2^{11}}$, тогда

$$\begin{cases} x_1 = 4^8 \cdot \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{1}{2^{11}} = \dfrac{2^{16}}{2^{14}} = 4 \\ x_2 = 4^8 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{2^{11}} = \dfrac{2^{16}}{2^{13}} = 8 \\ x_3 = 4^8 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2^{11}} = \dfrac{2^{16}}{2^{12}} = 16 \end{cases},$$

а величина полученной прибыли (максимальной для данного производства) равна $4 \cdot 4^{\frac{1}{8}} \cdot 8^{\frac{1}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} - 4 - 8 - 16 = 32 - 28 = 4$.

2.7. Неполное объединение предприятий

До данного момента считалось, что подразделения предприятия не ведут между собой никаких денежных расчетов (то есть они скорее являются цехами, нежели самостоятельными предприятиями, входящими в объединение). Если это не так, то предположим, что полуфабрикаты передаются из подразделения в подразделение по "внутренней" цене, в формировании которой участвуют только внутренние затраты подразделения (в явном виде в рассмотрении модели не участвующие), но не внешние затраты x_i и $\sum_{k=1}^{m_i} p_i^k y_i^k$. Тогда прибыль всего объединения выражается как

$$F_{(x)} = py_n - \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n-1} p_i y_i = pk\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} - \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n-1} p_i y_i$$

(2.7.1).

Здесь рассматривается первая схема производства, в которой входящими ресурсами на каждой стадии производства являются денежные вложения x_i и полуфабрикаты $y_i^t, t = \overline{1, m_i}$ (соответствует производственной функции (2.4.1)), p_i - "внутренние" цены на полуфабрикаты. Для полного раскрытия функции прибыли требуется расписать все y_i в третьей части формулы через x_i, что возможно только если задаться конкретной структурой производства.

Рассмотрим трехзвенную структуру производства, представленную на рис. 2.4.1. Зададимся производственными функциями Кобба-Дугласа:

$$\begin{cases} y_1 = k_1 x_1^{a_{11}} \\ y_2 = k_2 x_2^{a_{21}} y_1^{a_{22}} = k_2 k_1^{a_{22}} x_2^{a_{21}} x_1^{a_{11}a_{22}} \\ y_3 = k_3 x_3^{a_{31}} y_2^{a_{32}} = k_3 k_2^{a_{32}} k_1^{a_{22}a_{32}} x_3^{a_{31}} x_2^{a_{21}a_{32}} x_1^{a_{11}a_{22}a_{32}} \end{cases}.$$

Тогда прибыль (убыток) всего объединения по (2.7.1) представляются в виде:

$$F_{(x)} = pk_3 x_3^{a_{31}} y_2^{a_{32}} = k_3 k_2^{a_{32}} k_1^{a_{22}a_{32}} x_3^{a_{31}} x_2^{a_{21}a_{32}} x_1^{a_{11}a_{22}a_{32}} -$$
$$x_1 - x_2 - x_3 - p_1 k_1 x_1^{a_{11}} - p_2 k_2 k_1^{a_{22}} x_2^{a_{21}} x_1^{a_{11}a_{22}}$$

Для решения задачи максимизации прибыли (минимизации убытка) объединения ($F_{(x)} \to \max\limits_{x_1,\dots,x_n}$) необходимо найти подозрительные точки из системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = pk_1^{a_{22}a_{32}} k_2^{a_{32}} k_3 a_{11} a_{22} a_{32} x_1^{a_{11}a_{22}a_{32}-1} x_2^{a_{21}a_{32}} x_3^{a_{31}} - 1 - \\ \qquad p_1 k_1 a_{11} x_1^{a_{11}-1} - p_2 k_1^{a_{22}} k_2 a_{11} a_{22} x_1^{a_{11}a_{22}-1} x_2^{a_{21}} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = pk_1^{a_{22}a_{32}} k_2^{a_{32}} k_3 a_{21} a_{32} x_1^{a_{11}a_{22}a_{32}} x_2^{a_{21}a_{32}-1} x_3^{a_{31}} - 1 - \\ \qquad p_2 k_1^{a_{22}} k_2 a_{21} x_1^{a_{11}a_{22}} x_2^{a_{21}-1} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = pk_1^{a_{22}a_{32}} k_2^{a_{32}} k_3 a_{31} x_1^{a_{11}a_{22}a_{32}} x_2^{a_{21}a_{32}} x_3^{a_{31}-1} - 1 = 0 \end{cases}$$

и проверить эти точки на максимум (поскольку в целевой функции присутствуют разности выпуклых (вогнутых) функций заведомо неизвестно, какова будет сама функция $F_{(x)}$). Найти решение данной системы уравнений в явном виде не представляется возможным, необходимо применение численных методов решения систем нелинейных уравнений (или нелинейных методов оптимизации к функции прибыли (убытка) объединения).

Рассмотрим эффективность работы i-го подразделения. Если в формировании “внутренней” цены полуфабриката y_i участвуют внешние вложения x_i и расходы на полуфабрикаты, произведенные предыдущими подразделениями, то мерой эффективности работы подразделения может считаться отношение прибыли к затратам подразделения. В рассматривавшейся ранее производственной цепочке из трех подразделений, представленной на рис. 2.4.1, прибыль i-го подразделения S_i записывается как

$$\begin{gathered} S_1 = p_1 y_1 - x_1 \\ S_2 = p_2 y_2 - x_2 - p_1 y_1 \ , \\ S_3 = p_3 y_3 - x_3 - p_2 y_2 \end{gathered}$$

а прибыль на единицу расходов λ_i как

$$\lambda_1 = \frac{S_1}{x_1} = \frac{p_1 y_1 - x_1}{x_1} = p_1 x_1^{a_{11}-1} - 1$$

$$\lambda_2 = \frac{S_2}{x_2 + p_1 y_1} = \frac{p_2 y_2 - x_2 - p_1 y_1}{x_2 + p_1 y_1} = \frac{p_2 x_2^{a_{21}} y_1^{a_{22}}}{x_2 + p_1 y_1} - 1 = \frac{p_2 x_2^{a_{21}} x_1^{a_{11} a_{22}}}{x_2 + p_1 x_1^{a_{11}}} - 1$$

$$\lambda_3 = \frac{S_3}{x_3 + p_2 y_2} = \frac{p_3 y_3 - x_3 - p_2 y_2}{x_3 + p_2 y_2} = \frac{p_3 x_3^{a_{31}} y_2^{a_{32}}}{x_3 + p_2 y_2} - 1 = \frac{p_3 x_3^{a_{31}} x_2^{a_{21} a_{32}} x_1^{a_{11} a_{22} a_{32}}}{x_3 + p_2 x_2^{a_{21}} x_1^{a_{11} a_{22}}} - 1$$

(2.7.2).

Для максимизации эффективности деятельности всех подразделений можно потребовать, чтобы

$$\begin{gathered} \lambda' \to \max \\ \lambda_i = \lambda' \qquad (\lambda_i \ge \lambda') \qquad \forall i = \overline{1,3}. \end{gathered}$$

Произведя замену $\lambda = \lambda' + 1$, получаем следующую задачу нелинейной оптимизации (на основании (2.7.2)) для ограничений-равенств:

$$\lambda \to \max$$

$$\begin{cases} \lambda = p_1 x_1^{a_{11}-1} = f_{1(x)} \\ \lambda = \dfrac{p_2 x_2^{a_{21}} x_1^{a_{11}a_{22}}}{x_2 + p_1 x_1^{a_{11}}} = f_{2(x)} \\ \lambda = \dfrac{p_3 x_3^{a_{31}} x_2^{a_{21}a_{32}} x_1^{a_{11}a_{22}a_{32}}}{x_3 + p_2 x_2^{a_{21}} x_1^{a_{11}a_{22}}} = f_{3(x)} \end{cases} \tag{2.7.3}$$

Отметим, что градиенты ограничений имеют вид $\nabla f_{1(x)} = \begin{pmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \nabla f_{2(x)} = \begin{pmatrix} \times \\ \times \\ 0 \end{pmatrix}, \nabla f_{1(x)} = \begin{pmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{pmatrix}$, где $\times$ – ненулевые составляющие вектора, то есть $\forall x : \left.\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_x \neq 0 \forall i, j = \overline{1,3}$ градиенты ограничений линейно независимы. Таким образом, для решения задачи оптимизации можно воспользоваться функцией Лагранжа:

$$\Phi_{(x,\lambda,y)} = \lambda + y_1\left(\lambda - p_1 x_1^{a_{11}-1}\right) + y_2\left(\lambda - \frac{p_2 x_2^{a_{21}} x_1^{a_{11}a_{22}}}{x_2 + p_1 x_1^{a_{11}}}\right) +$$
$$y_3\left(\lambda - \frac{p_3 x_3^{a_{31}} x_2^{a_{21}a_{32}} x_1^{a_{11}a_{22}a_{32}}}{x_3 + p_2 x_2^{a_{21}} x_1^{a_{11}a_{22}}}\right).$$

Была выписана система уравнений для нахождения экстремумов функции через функцию Лагранжа, однако в явном виде решить эту систему из семи нелинейных уравнений не представляется возможным. Поэтому опять необходимо применение численных методов решения систем нелинейных уравнений.

В общем случае может оказаться невозможным выписать формулу прибыли i-го подразделения, не привязываясь к конкретной структуре производственного объединения, поэтому вместо прибыли в последующей задаче в качестве критерия эффективности предлагается взять $\frac{p_i y_i}{x_i}$. Данный критерий плох если цена p_i является себестоимостью производимого полуфабриката, учитывающей стоимость входящих на производство полуфабрикатов. Тогда для производства, имеющего очень большое потребление полуфабрикатов произведенных в других подразделениях, но при этом очень маленькие собственные затраты, эффективность будет завышена. И обратно, подразделения, не потребляющие полуфабрикатов (находящиеся в самом низу производственной иерархии) будут иметь низкие показатели эффективности. Однако критерий может быть вполне адекватен, если p_i – рассматривавшаяся ранее “внутренняя” цена, в формировании которой не участвуют стоимости передаваемых подразделению для переработки полуфабрикатов.

2.8. Схемы распределение выручки в объединениях, сравнение их эффективности

При получении объединением выручки за реализацию итоговой продукции необходимо предусмотреть механизм ее распределения по подразделениям с целью поощрения эффективной работы и предотвращения умышленного завышения либо занижения затрат (под этим подразумевается искажение информации о реально имеющихся показателях производства). В случае отсутствия прибыли (при выполнении $p_n y_n \le \sum_{i=1}^{n} x_i$) предлагается распределять выручку по алгоритму:

1. определить $\gamma = \gamma^*$ из равенства $p_n y_n = \sum_{i=1}^{n} \min(x_i; \gamma \frac{p_i y_i}{x_i})$, (зависимость γ от $p_n y_n$ представлена на рис. 2.8.1),
2. получаемая i-м подразделением доля выручки равна $\min(x_i; \gamma \frac{p_i y_i}{x_i})$.

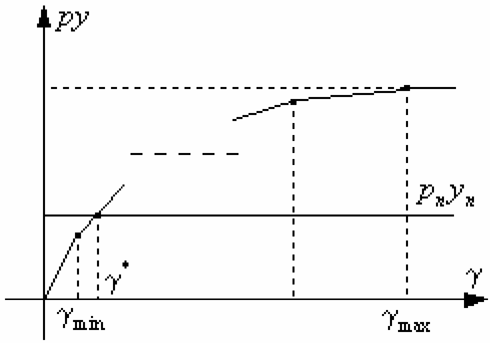


Рис. 2.8.1. Зависимость γ от $p_n y_n$
(число переломов графика равно n).

Таким образом, подразделению покрывается его заявка на расходы x_i (если выполняется условие $x_i \le \gamma \frac{p_i y_i}{x_i}$, то есть показатель эффективности $\frac{p_i y_i}{x_i}$ велик и / или заявка x_i мала), либо выдается сумма, пропорциональная эффективности. Вся сумма выручки при этом распределяется. При таком механизме распределения с одной стороны, не выгодно завышать собственные расходы x_i (как осуществляя перерасход средств, так и просто искажая значения реальных показателей), что приведет к уменьшению показателя эффективности подразделения, с другой стороны, не выгодно занижать собственные расходы, поскольку более суммы, указанной в заявке, подразделение не получит. Очевидно, оптимальная заявка на собственные расходы определяется как $x_i^* = \sqrt{\gamma p_i y_i}$, но участникам объединения неизвестен коэффициент γ, определяемый на основании выручки, полученной от продажи итоговой продукции. Таким образом, схема дает мало шансов для мошенничества.

Очевидно, данная схема распределения выручки не работает в том случае, если $p_n y_n > \sum_{i=1}^{n} x_i$, то есть объединение получило прибыль. Тогда уравнение для нахождения γ: $p_n y_n = \sum_{i=1}^{n} \min(x_i; \gamma \frac{p_i y_i}{x_i})$ не будет иметь корней. Можно применить одну из следующих схем распределения выручки.

<u>Схема 1</u>:

1. покрываются все заявки на собственные расходы x_i,

2. прибыль объединения распределяется пропорционально эффективности, то есть из $p_n y_n - \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma \frac{p_i y_i}{x_i}$ находится γ и каждое подразделение получает дополнительно сумму $\gamma \frac{p_i y_i}{x_i}$.

<u>Схема 2</u> (каждое подразделение получает долю, пропорциональную эффективности своей работы):

1. из $p_n y_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma \frac{p_i y_i}{x_i}$ находится γ
2. каждое подразделение получает сумму $\gamma \frac{p_i y_i}{x_i}$.

Также могут использоваться схемы распределения выручки, основанные на принципе равных рентабельностей, при котором рентабельности всех участников одинаковы, либо на противозатратном принципе [8]. На основании данных схем распределения выручки могут быть построены динамические модели обмена, в которых собственными затратами x_i на последующей итерации являются возмещения собственных затрат и премии за эффективность производства на предыдущих итерациях:

- при первой приведенной выше схеме распределения при наличии прибыли $x_i^{n+1} = x_i^n + \gamma \frac{p_i y_i^n}{x_i^n}$,
- при второй приведенной выше схеме распределения при наличии прибыли $x_i^{n+1} = \gamma \frac{p_i y_i^n}{x_i^n}$,

- при отсутствии прибыли $x_i^{n+1} = \min\left(x_i^n, \gamma \frac{p_i y_i^n}{x_i^n} \right)$.

Время в данных моделях является дискретным и метод простых итераций, использованный для нахождения положений экономического равновесия, приобретает экономическую интерпретацию как отображающий динамику развития производственной системы.

При этом, если система на первой итерации находится в области положительной прибыли, то достоинством первой схемы распределения выручки является неубывание выпуска объединением итогового продукта, поскольку все заявки на покрытие собственных затрат x_i выполняются. Тогда возможно либо бесконечное расширение производства (при возрастающей отдаче агрегатной производственной функции для всей системы), либо выход на предельный уровень выпуска при котором объединение уже не получает прибыли (при убывающей отдаче агрегатной производственной функции).

Недостатком первой схемы распределения дохода при наличии прибыли является отсутствие защиты против дезинформации. Подразделения могут завышать собственные затраты до тех пор, пока объединение все еще имеет прибыль, и такие затраты все равно будут покрыты.

Вторая схема распределения дохода при наличии прибыли защищена от этого вида мошенничества, однако при занижении собственных затрат (искажении информации с целью получения большей доли при дележе результатов деятельности) подразделение получает высокий коэффициент эффективности, а, следовательно, и более высокую долю выручки. Еще одним недостатком второй схемы является возможность убывания выпуска итогового продукта (так как подразделениям с низкой эффективностью производства могут быть не возмещены все собственные затраты x_i), данное предположение было подтверждено при помощи вычислительного эксперимента. По данным причинам первая схема дележа выручки при наличии прибыли представляется предпочтительной.

Проведенные численные эксперименты показали, что при выпуклости агрегатной производственной функции всего объединения наблюдается сходимость итеративного процесса к неподвижной точке, в которой отсутствует прибыль объединения. При этом начальная точка x^1 бралась и из области положительной прибыли, так и из области убытка. Рассмотрим теоретическое обоснование сходимости первой схемы распределения доходов в случае выпуклой функции прибыли объединения, то есть при агрегатной производственной функции объединения с убывающей отдачей.

Если на k-й итерации объединение не получает прибыль, то справедливы утверждения $p_n y_n^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1}$, $x_i^{k+1} \le x_i^k$ (по построению итераций), и $p_n y_n^k \ge p_n y_n^{k+1}$ (в силу свойств производственной функции Кобба-Дугласа для $x_i^{k+1} \le x_i^k$), откуда $p_n y_n^{k+1} \le \sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1}$, то есть попав в область отсутствия прибыли, итерационный процесс из нее не выйдет. Поскольку при этом $x_i^{k+1} \le x_i^k$, мы имеем дело с постоянно убывающей и ограниченной снизу (0-вектором) последовательностью. Данная последовательность сходится к неподвижной точке, соответствующей отсутствию убытка для объединения.

Если на k-й итерации объединение получает прибыль и используется первая схема распределения выручки, обеспечивающая неубывание выпуска итогового продукта, то на каждой следующей итерации будет получен $x_i^{k+1} > x_i^k$. Следовательно, процесс будет строго возрастающим и ограниченным сверху (поскольку множество, на котором $p_n y_n > \sum_{i=1}^{n} x_i$ ограничено сверху, а данный процесс не может попасть в область убытка, начавшись в области прибыли), а значит, он сойдется к неподвижной точке, соответствующей отсутствию прибыли для объединения при максимально возможных собственных затратах x_i.

Если же используется вторая схема распределения выручки при наличии прибыли, то существование неподвижной точки и сходимость к ней метода простых итераций не были доказаны, хотя сходимость наблюдалась во всех численных экспериментах при выпуклости агрегатной производственной функции. В случае с возрастающей отдачей (вогнутостью агрегатной производственной функции) множество затрат, обеспечивающих положительную прибыль объединения, неограниченно, а сама функция прибыли бесконечно возрастает с ростом затрат, то есть сходимость невозможна.

Пример. В рассматривавшейся ранее системе с производственными функциями

$$\begin{cases} y_1 = 4\sqrt{x_1} \\ y_2 = 2\sqrt{y_1 x_2} \\ y_3 = 2\sqrt{y_2 x_3} \end{cases}$$

рассмотрим начальные вложения $x_1^0 = 1.5, x_2^0 = 1.5, x_3^0 = 30$ (наблюдается явный дисбаланс собственных затрат в третьем подразделении). Производство при таких вложениях $y_1 = 4.899, y_2 = 5.422, y_3 = 25.507$, при цене $p_3 = 1$ используется схема распределения при отсутствии прибыли: $x_1^1 = 1.5, x_2^1 = 1.5, x_3^1 = 22.507$. Продолжая далее, на восьмой итерации получаем $x_1^8 = 1.5, x_2^8 = 1.5, x_3^8 = 15.251$, при этом $\left\| x^8 - x^7 \right\| = 0.065, p_3 y_3 - \sum_{i=1}^{3} x_i < 0.001$ и $y_1 = 4.899, y_2 = 5.422, y_3 = 18.251$.

Для той же производственной рассмотрим начальные вложения $x_1^0 = 3, x_2^0 = 12, x_3^0 = 30$. Производство при таких вложениях $y_1 = 6.928, y_2 = 18.236, y_3 = 46.783$, при цене $p_3 = 1$ используется вторая схема распределения при наличии прибыли: $x_1^1 = 20.049, x_2^1 = 13.139, x_3^1 = 13.537$ (отметим, что при этом очень сильно изменилась структура собственных затрат при переходе ко второй итерации). Выручка на второй итерации будет уже меньше суммы собственных затрат, используя схему распределения при отсутствии прибыли, на шестой итерации получаем $x_1^6 = 11.289, x_2^6 = 13.193 x_3^6 = 13.537$, при этом $\left\| x^6 - x^5 \right\| = 0.045, p_3 y_3 - \sum_{i=1}^{3} x_i = 0.001$ и $y_1 = 13.503, y_2 = 26.695, y_3 = 38.020$

(отметим, что в этом положении равновесия производство итогового продукта на первой итерации больше, чем на последней, что было бы невозможно при использовании на первой итерации первой схемы распределения при наличии прибыли, обеспечивающей неубывание выпуска итогового продукта).

3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ ОБРАЗОВАНИЯ ОБЪЕДИНЕНИЙ

3.1. Структура предметной области примера

Рассмотрим применение разработанного аппарата на примере строительного объединения. Имеется последовательная цепочка взаимоотношений предприятий при производстве силикатного кирпича. В цепочку входят следующие звенья:

- предприятие по производству извести (г. Россошь);
- транспортное предприятие, осуществляющее перевозку извести;
- силикатный завод, производящий кирпич (пос. Придонской).

Для построения производственных функций были взяты следующие статистические данные:

- продукт y_1, производство извести (тыс. тонн): один входной ресурс – x_1, денежные затраты (тыс. рублей), зависимость ищется в виде $y_1 = k_1 x_1^{a_{11}}$;
- продукт y_2, количество перевезенной извести (тыс. тонн): входные ресурсы – x_2, денежные затраты (тыс. рублей) и y_1 – количество извести, произведенной первым подразделением и предназначенной к перевозке на силикатный завод, зависимость ищется в виде $y_2 = k_2 y_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}}$;
- итоговый продукт y_3, количество произведенного силикатного кирпича (млн. штук): входные ресурсы – x_3, денежные затраты (тыс. рублей) и y_2 – количество извести, привезенной

транспортным подразделением (тыс. тонн), зависимость ищется в виде $y_3 = k_3 y_2^{a_{31}} x_3^{a_{32}}$.

Произведенная продукция (силикатный кирпич) продается по цене p = 770 руб. за тысячу штук. Для обеспечения замены одного ресурса на другой в рассмотрение включены ситуации покупки ресурсов у сторонних организаций и продажи ресурсов сторонним организациям. Покупка производилась по рыночным ценам, установившимся на соответствующий момент времени (для извести без учета стоимости перевозки около 165 рублей на тысячу штук кирпича (около 37 рублей за тонну), с учетом стоимости перевозки около 330 рублей на тысячу штук кирпича (около 73 рублей за тонну)). Более точные значения цен покупки-продажи ресурсов могут быть получены из статистических данных для соответствующих количеств ресурсов и временных интервалов. Кроме того, известно что при перевозке возможны потери (приблизительно 2%). Норма затраты извести при производстве кирпича равна 4.5 тонны на 1 тысячу штук кирпича. Все суммы исчисляются в деноминированных рублях.

Целью исследования является определение оптимальной политики взаимных расчетов, покупок (продаж) ресурсов на стороне, количеств выпуска продуктов. Оптимальность рассматривается с точек зрения максимизации прибыли объединения либо попадания в устойчивое положение производственного равновесия при возможно большем выпуске итогового продукта.

3.2. Вычисление коэффициентов производственных функций

Все использовавшиеся статистические данные (в том числе, данные для определения замены ресурсов) представлены в таблицах. Ниже определяются коэффициенты производственной функции Кобба-Дугласа для предприятия, производящего известь.

Данные о затратах на добычу и добытом количестве извести за 1996 и 1997 годы.

Период	1996 год		1997 год	
	Деньги тыс. руб.	Перевезти тыс. т.	Деньги тыс. руб.	Перевезти тыс. т.
1	2	3	4	5
Январь	928.8	28.9	875.8	27.4
Февраль	725.4	23.4	1067.0	32.1
Март	1290.6	37.9	1325.2	38.9
1 кв.	*2944.8*	*90.2*	*3268.0*	*98.4*
Апрель	1642.3	47.5	1503.6	43.8
Май	1892.0	54.0	1752.0	50.2
Июнь	1905.6	54.8	2112.7	58.5
2 кв.	*5439.9*	*156.3*	*5368.3*	*152.5*
Июль	2065.0	57.3	1942.4	55.4
Август	2079.2	57.7	2123.8	58.8
Сентябрь	2044.3	56.9	2212.6	60.5
3 кв.	*6188.5*	*171.9*	*6278.8*	*174.7*
Октябрь	1885.6	53.8	2027.6	56.2
Ноябрь	1587.9	46.0	1672.0	48.4
Декабрь	1065.0	32.0	1083.4	32.6
4 кв.	*4538.5*	*131.8*	*4783.0*	*137.2*
за год	**19111.7**	**550.2**	**19698.1**	**562.8**

Результаты проведенной регрессии.

- Коэффициент корреляции $r^2 = 0.9989$.

- Оценка среднеквадратичного отклонения логарифма произведенного продукта $\sigma = 0.0092$.
- Логарифм функции максимального правдоподобия: 79.3696.
- Оцененные коэффициенты для логарифма производственной функции:

Коэфф.-т	Значение	Ошибка	Т-статист.	р-статист.
a_{11}	0.8713	0.0059	147.90	>0.001%
$\ln k_1$	-2.5963	0.0433	- 59.96	>0.001%

- Отметим, что результаты регрессии по всем показателям соответствуют действительности: коэффициент корреляции близок к 1, Т-статистика (с 21 степенью свободы) для коэффициента, стоящего при переменной >> 2, р-статистика << 5%, логарифм функции максимального правдоподобия велик. Все это дает основания считать, что производственная функция Кобба-Дугласа действительно хорошо представляет данный производственный процесс.
- Производственная функция имеет вид $y_1 = 0.0746 \cdot x_1^{0.8713}$.

Ниже представлена таблица исходных и приближенных при помощи производственной функции значений производства.

Месяц	Исходное	Приближенное	Квадрат ошибки
1	2	3	4
01.1996	28.9	28.74183	0.0250190
02.1996	23.4	23.17288	0.0515814
03.1996	37.9	38.28274	0.1464873
04.1996	47.5	47.22791	0.0740349
05.1996	54.0	53.42679	0.3285669
06.1996	54.8	53.76127	1.0789600
07.1996	57.3	57.65929	0.1290886
08.1996	57.7	58.00462	0.0927937
09.1996	56.9	57.15534	0.0651960

1	2	3	4
10.1996	53.8	53.26928	0.2816591
11.1996	46.0	45.86184	0.0190879
12.1996	32.0	32.38144	0.1454954
01.1997	27.4	27.30738	0.0085788
02.1997	32.1	32.43442	0.1118360
03.1997	38.9	39.17550	0.0758993
04.1997	43.8	43.73293	0.0044982
05.1997	50.2	49.96518	0.0551396
06.1997	58.5	58.81811	0.1011962
07.1997	55.4	54.66479	0.5405274
08.1997	58.8	59.08729	0.0825365
09.1997	60.5	61.23429	0.5391844
10.1997	56.2	56.74829	0.3006166
11.1997	48.4	47.97125	0.1838247
12.1997	32.6	32.86838	0.0720267
			4.5138350

Графически внешний вид построенной зависимости и исходные данные, по которым она была построена, представлены на рис. 3.2.1.

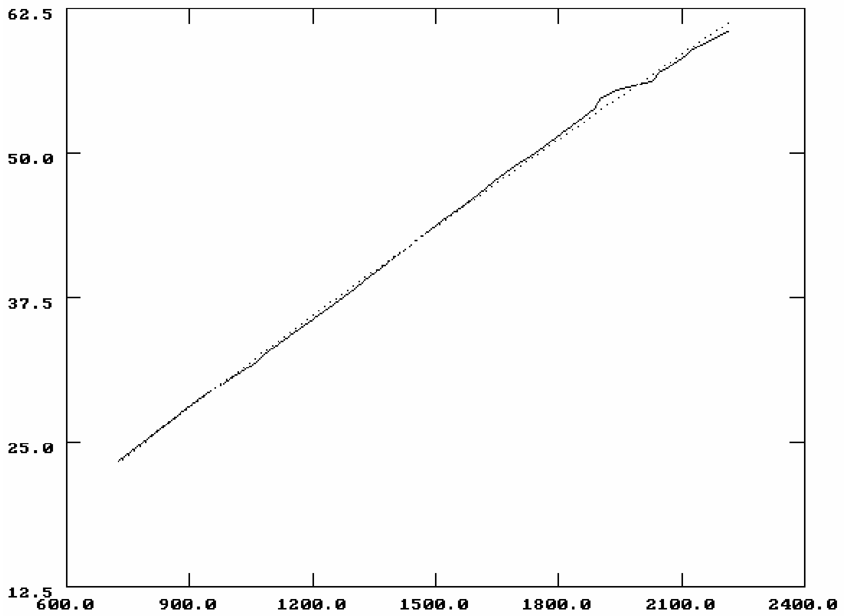


Рис. 3.2.1. Зависимость произведенной извести от денежных вложений.

Далее рассматривается определение коэффициентов производственной функции Кобба-Дугласа для второго подразделения, перевозящего известь на силикатный завод.

Данные о затратах на перевозку и перевезенном количество извести за 1996 и 1997 годы.

Период	1996 год			1997 год		
	Перев. тыс. т.	Деньги тыс.руб	Изв-ть тыс. т.	Перев. тыс. т.	Деньги тыс.руб	Изв-ть тыс. т.
1	2	3	4	5	6	7
Январь	28.9	1058.8	31.7	27.4	855.9	28.0
Февраль	23.4	1086.0	29.2	32.1	1021.5	32.8

1	2	3	4	5	6	7
Март	37.9	1479.8	41.4	38.9	1563.1	42.9
1 кв.	*90.2*	*3624.6*	*102.3*	*98.4*	*3440.5*	*103.7*
Апрель	47.5	1475.5	46.5	43.8	1483.6	44.2
Май	54.0	1511.2	49.6	50.2	1646.6	48.8
Июнь	54.8	1804.4	53.4	58.5	1711.1	53.7
2 кв.	*156.3*	*4791.1*	*149.5*	*152.5*	*4841.3*	*146.7*
Июль	57.3	1404.7	49.8	55.4	1848.1	54.0
Август	57.7	1622.3	52.2	58.8	1635.3	53.1
Сентябрь	56.9	1499.1	50.6	60.5	1571.0	52.8
3 кв.	*171.9*	*4526.1*	*152.6*	*174.7*	*5054.4*	*159.9*
Октябрь	53.8	1576.8	50.4	56.2	1895.7	54.7
Ноябрь	46.0	1471.3	45.1	48.4	1464.9	46.3
Декабрь	32.0	1189.9	34.8	32.6	1132.3	34.4
4 кв.	*131.8*	*4238.0*	*130.3*	*137.2*	*4492.9*	*135.4*
за год	**550.2**	**17179.8**	**534.7**	**562.8**	**17829.1**	**545.7**

Примечание: в таблице приведены суммарные данные, в том числе включающие данные о дополнительной закупке / продаже извести (Таблица “Данные о дополнительной закупке на стороне и продаже извести подразделением перевозки за 1996 и 1997 годы”). Также учтены транспортные потери.

Данные о дополнительной закупке на стороне и продаже извести подразделением перевозки за 1996 и 1997 годы.

Период	1996 год		1997 год	
	Закупить / Продать тыс. т.	Сумма тыс. руб.	Закупить / Продать тыс. т.	Сумма тыс. руб.
1	2	3	4	5
Январь	+ 3.3	+ 125.1	+ 1.2	+ 44.1
Февраль	+ 6.2	+ 254.2	+ 1.1	+ 40.2
Март	+ 4.3	+ 167.5	+ 5.1	+ 204.2
1 кв.	*+ 13.8*	*+ 546.8*	*+ 7.4*	*+ 288.5*
Апрель	0.0	0.0	+ 1.5	+ 55.6

1	2	3	4	5
Май Июнь	- 3.2 0.0	- 112.4 0.0	0.0 - 3.4	0.0 - 122.9
2 кв.	*- 3.2*	*- 112.4*	*- 1.9*	*- 67.3*
Июль Август Сентябрь	- 6.4 - 4.3 - 5.2	- 231.1 - 152.9 - 180.2	0.0 - 4.5 - 6.3	0.0 - 160.0 - 220.2
3 кв.	*- 15.9*	*- 564.2*	*- 10.8*	*- 380.2*
Октябрь Ноябрь Декабрь	- 2.3 0.0 + 3.4	- 84.2 0.0 + 125.4	0.0 - 1.2 + 2.3	0.0 - 43.7 + 85.8
4 кв.	*+ 1.1*	*+ 41.2*	*+ 1.1*	*+ 42.1*
за год	**-4.2**	**-88.6**	**-4.2**	**-116.9**

Примечание: в данной таблице приведены количества извести, которую необходимо продать сторонним организациям для покрытия собственных затрат по данному договору, а также необходимо купить у сторонних организаций для выполнения договора. Покупка и продажа осуществлялась по рыночным ценам. Данные получены на основании экспертного оценивания деятельности подразделения.

Результаты проведенной регрессии.

- Коэффициент корреляции $r^2 = 0.9991$.
- Оценка среднеквадратичного отклонения логарифма произведенного продукта $\sigma = 0.0062$.
- Логарифм функции максимального правдоподобия: 89.4259.
- Оцененные коэффициенты для логарифма производственной функции:

Коэфф.-т	Значение	Ошибка	Т-статист.	p-статист.
a_{21}	0.47882	0.0091	52.68	>0.001%

Коэфф.-т	Значение	Ошибка	Т-статист.	р-статист.
a_{22}	0.40448	0.0128	31.72	>0.001%
$\ln k_2$	-0.97224	0.0651	-14.94	>0.001%

- Отметим, что, как и в предыдущем случае, результаты регрессии по всем показателям соответствуют действительности, то есть производственная функция Кобба-Дугласа действительно хорошо представляет данный производственный процесс.
- Производственная функция имеет вид $y_2 = 0.3782 \cdot y_1^{0.4788} x_2^{0.4045}$.

Ниже представлена таблица исходных и приближенных при помощи производственной функции значений производства.

Месяц	Исходное	Приближенное	Квадрат ошибки
1	2	3	4
01.1996	31.7	31.67702	0.0005279
02.1996	29.2	28.92685	0.0746130
03.1996	41.4	41.29792	0.0104194
04.1996	46.5	45.95865	0.2930579
05.1996	49.6	49.34432	0.0653735
06.1996	53.4	53.38813	0.0001409
07.1996	49.8	49.28722	0.2629399
08.1996	52.2	52.41798	0.0475146
09.1996	50.6	50.43163	0.0283486
10.1996	50.4	50.11066	0.0837190
11.1996	45.1	45.20577	0.0111865
12.1996	34.8	34.86895	0.0047544
01.1997	28.0	28.33288	0.1108066
02.1997	32.8	32.83083	0.0009507
03.1997	42.9	42.75274	0.0216864
04.1997	44.2	44.30628	0.0112944
05.1997	48.8	49.33292	0.2840053
06.1997	53.7	53.91443	0.0459807
07.1997	54.0	54.18920	0.0357978

1	2	3	4
08.1997	53.1	53.06514	0.0012150
09.1997	52.8	52.92850	0.0165131
10.1997	54.7	55.12661	0.1819972
11.1997	46.3	46.23852	0.0037793
12.1997	34.4	34.48146	0.0066361
			1.603258

Далее рассматривается определение коэффициентов производственной функции Кобба-Дугласа для последнего подразделения, производящего силикатный кирпич.

Данные о затратах на производство и выпуске кирпича за 1996 и 1997 годы.

Период	1996 год			1997 год		
	Изв. тыс.т.	Деньги тыс.руб	Выпуск млн.шт	Изв. тыс.т.	Деньги тыс.руб	Выпуск млн.шт
1	2	3	4	5	6	7
Январь	31.7	5413.0	10.8	28.0	5751.1	10.7
Февраль	29.2	4952.4	9.9	32.8	5463.4	10.9
Март	41.4	5757.2	12.4	42.9	6036.0	12.8
1 кв.	*102.3*	*16022.6*	*33.1*	*103.7*	*17250.5*	*34.4*
Апрель	46.5	5644.7	12.7	44.2	5818.8	12.5
Май	49.6	5329.0	12.6	48.8	5863.9	12.9
Июнь	53.4	5509.4	13.3	53.7	6047.2	13.7
2 кв.	*149.5*	*16483.1*	*38.6*	*146.7*	*17729.9*	*39.1*
Июль	49.8	5741.4	12.9	54.0	6087.0	13.5
Август	52.2	5875.6	13.3	53.1	5861.5	13.2
Сентябрь	50.6	5727.5	13.0	52.8	6046.9	13.4
3 кв.	*152.6*	*17344.5*	*39.2*	*159.9*	*17995.4*	*40.1*
Октябрь	50.4	5785.0	13.2	54.7	6583.8	14.2
Ноябрь	45.1	5654.5	12.6	46.3	6946.8	13.8
Декабрь	34.8	5445.7	11.3	34.4	6028.5	11.5
4 кв.	*130.3*	*16885.2*	*37.1*	*135.4*	*19559.1*	*39.5*

1	2	3	4	5	6	7
за год	**534.7**	**66735.4**	**148.0**	**545.7**	**72534.9**	**153.1**

Примечание: в таблице приведены суммарные данные, в том числе включающие данные о дополнительной закупке извести (Таблица "Данные о дополнительной закупке извести для производства кирпича за 1996 и 1997 годы").

Данные о дополнительной закупке извести для производства кирпича за 1996 и 1997 годы.

Период	1996 год		1997 год	
	Известь тыс. т.	Сумма тыс. руб.	Известь тыс. т.	Сумма тыс. руб.
1	2	3	4	5
Январь	17.2	1565.0	21.1	1945.6
Февраль	15.6	1368.2	17.3	1574.0
Март	14.4	1173.2	14.7	1208.4
1 кв.	*47.2*	*4106.4*	*53.1*	*4728.9*
Апрель	10.6	817.9	12.1	981.3
Май	7.1	523.2	9.3	711.9
Июнь	6.5	474.0	7.9	592.2
2 кв.	*24.2*	*1815.1*	*29.3*	*2285.4*
Июль	8.2	634.6	6.7	478.6
Август	7.7	539.8	6.5	447.5
Сентябрь	7.9	568.5	7.4	557.1
3 кв.	*23.8*	*1742.9*	*20.6*	*1483.2*
Октябрь	9.0	699.4	9.2	712.4
Ноябрь	11.6	929.5	15.8	1318.2
Декабрь	16.1	1343.8	17.4	1531.0
4 кв.	*36.7*	*2972.7*	*42.4*	*3561.6*
за год	**131.9**	**10637.1**	**145.4**	**11959.1**

Результаты проведенной регрессии.

- Коэффициент корреляции $r^2 = 0.9851$.

- Оценка среднеквадратичного отклонения логарифма произведенного продукта $\sigma = 0.0113$.
- Логарифм функции максимального правдоподобия: 75.0499.
- Оцененные коэффициенты для логарифма производственной функции:

Коэфф.-т	Значение	Ошибка	Т-статист.	р-статист.
a_{31}	0.3526	0.0126	27.93	>0.001%
a_{32}	0.4338	0.0393	11.04	>0.001%
$\ln k_3$	-2.5690	0.3209	-8.01	>0.001%

- Отметим, что, как и в предыдущих случаях, результаты регрессии по всем показателям соответствуют действительности, производственная функция Кобба-Дугласа хорошо представляет данный производственный процесс.
- Производственная функция имеет вид $y_3 = 0.0766 \cdot y_2^{0.3526} x_3^{0.4338}$.

Ниже представлена таблица исходных и приближенных при помощи производственных функций значений производства.

Месяц	Исходное	Приближенное	Квадрат ошибки
1	2	3	4
01.1996	10.8	10.79726	0.0000075
02.1996	9.9	10.09201	0.0368682
03.1996	12.4	12.18462	0.0463876
04.1996	12.7	12.58591	0.0130168
05.1996	12.6	12.55811	0.0017546
06.1996	13.3	13.07681	0.0498129
07.1996	12.9	12.98927	0.0079691
08.1996	13.3	13.33970	0.0015759
09.1996	13.0	13.04874	0.0023756
10.1996	13.2	13.08712	0.0127413
11.1996	12.6	12.46034	0.0195052
12.1996	11.3	11.18759	0.0126356
01.1997	10.7	10.61017	0.0080695

1	2	3	4
02.1997	10.9	10.97195	0.0051765
03.1997	12.8	12.59426	0.0423301
04.1997	12.5	12.52678	0.0007172
05.1997	12.9	13.01536	0.0133068
06.1997	13.7	13.64295	0.0032542
07.1997	13.5	13.70874	0.0435724
08.1997	13.2	13.40637	0.0425882
09.1997	13.4	13.56159	0.0261121
10.1997	14.2	14.24794	0.0022983
11.1997	13.8	13.75093	0.0024082
12.1997	11.5	11.64454	0.0208917
			0.4153755

Получены следующие производственные функции:

- для подразделения №1 (производство извести) $y_1 = 0.0746 \cdot x_1^{0.8713}$;
- для подразделения №2 (перевозка извести) $y_2 = 0.3782 \cdot y_1^{0.4788} x_2^{0.4045}$;
- для подразделения №3 (производство кирпича) $y_3 = 0.0766 \cdot y_2^{0.3526} x_3^{0.4338}$.

В таком случае последовательно подставляя производственные функции одну в другую, получаем агрегатную производственную функцию объединения, имеющую вид

$$y_3 = k_1 k_2^{a_{31}} k_3^{a_{31}a_{21}} x_1^{a_{31}a_{21}a_{11}} x_2^{a_{31}a_{22}} x_3^{a_{32}} = 0.035077 \cdot x_1^{0.147097} x_2^{0.142627} x_3^{0.433834} \qquad (3.2.1).$$

Некорректно будет считать, что альтернативным способом вычисления агрегатной производственной функции является определение зависимости выпуска итогового выпуска продукта от денежных вложений в каждое производственное звено. При таком способе определения коэффициентов не учитывается структура системы, и полученные результаты имеют плохие показатели достоверности и не удовлетворяют экономическим ограничениям.

3.3. Результаты оптимизации деятельности объединения

В данной модели задачи оптимизации, рассматривавшиеся в предыдущей главе, имеют смысл, поскольку агрегатная производственная функция объединения имеет убывающую отдачу и, следовательно, множество прибыли имеет структуру, рассмотренную также в предыдущей главе (выпуклое ограниченное множество). Внешний вид верхней и нижней границ множества прибыли представлен на рисунках.

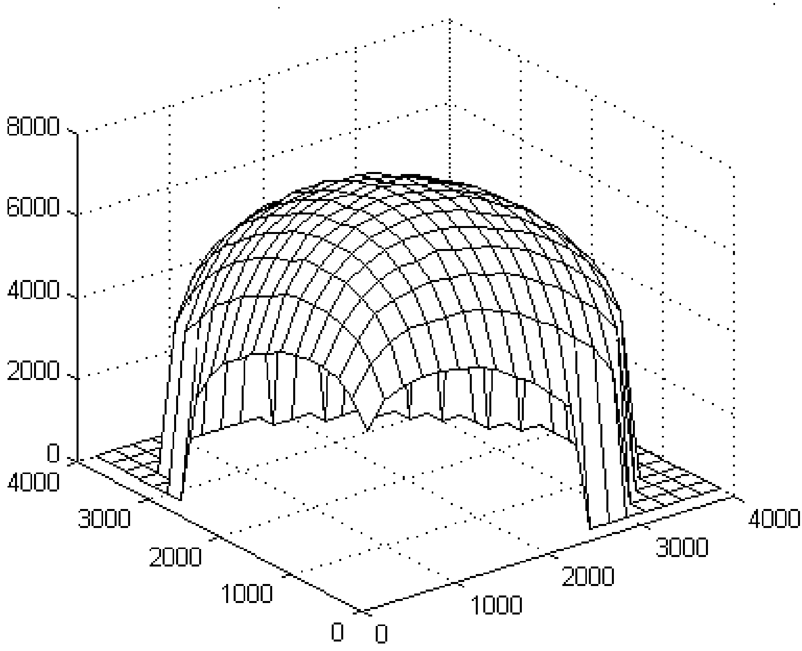


Рис. 3.3.1. Верхняя граница множества прибыли для производственной функции (3.2.1).

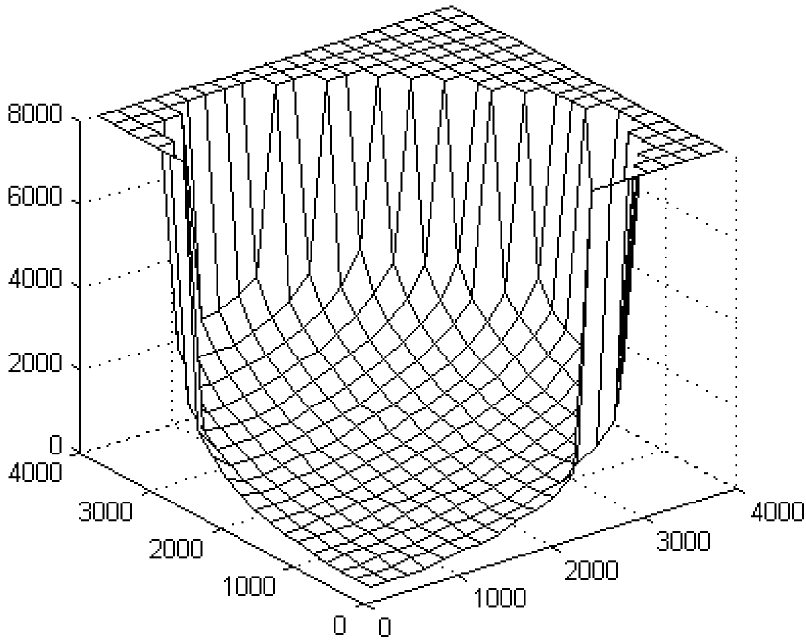


Рис. 3.3.2. Нижняя граница множества прибыли для производственной функции (3.2.1).

В таком случае, функция цели для максимизации прибыли всей производственной системы, в соответствии с формулой (2.4.3), имеет вид:

$$p_3 y_3 - x_1 - x_2 - x_3 = 27.00936 x_1^{0.147097} x_2^{0.142627} x_3^{0.433834} - x_1 - x_2 - x_3 \to \max_{x_1, x_2, x_3}$$

В соответствии с формулой (2.2.6) получаем точку, в которой этот максимум достигается. Получаем

$$(x_1, x_2 x_3) = (789.74456, 765.74571, 2329.19803),$$

при этом прибыль равна 1484.18115 тыс. руб.

Предположим, что каждому производственному звену возмещены издержки на производство продукции и выдана некоторая доля прибыли в качестве премии (используется первая схема распределения прибыли). Тогда при вложении всех этих сумм в следующем периоде будет получено большее количество выпущенной продукции, но при этом прибыль объединения будет меньше. Данный процесс, как было показано в теоретической части, будет сходится к положению, в котором прибыль объединения будет равна 0. На каждом последующем этапе производство итогового продукта будет увеличиваться, а прибыль – уменьшаться. Например, использую в качестве начального состояния системы решение задачи максимизации прибыли, получаем представленную в таблице картину.

№	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	Приб.
1	2	3	4	5	6	7	8
1	729.34	707.18	2151.06	23.29	24.27	6.58	1484.18
2	1281.69	1239.57	2846.19	38.07	38.52	8.75	1367.01
3	1724.07	1656.17	3354.22	49.29	49.02	10.23	1138.43
25	3143.82	2967.07	5053.41	83.19	79.73	14.50	0.27
26	3143.90	2967.15	5053.52	83.19	79.73	14.50	0.19

Для того, чтобы получать максимальную прибыль в дальнейшем, предприятия, входящие в состав объединения, должны использовать премиальные денежные средства на непроизводственные нужды.

3.4. Структура расчетов между членами объединения

Очевидно, что в современной налоговой ситуации не имеет смысла максимизировать прибыль объединения. С этой точки зрения интересен вопрос выработки политики взаиморасчетов между участниками производственного процесса, приводящей к максимизации выпуска итогового продукта при условии неубыточности производства.

В случае наличия прибыли рекомендуется проводить расчеты по первой из предложенных схем, то есть прибыль распределять пропорционально эффективности работы подразделений после покрытия собственных затрат подразделениям. Во-первых, данная схема более устойчива к завышению показателей эффективности, но при этом, при наличии прибыли, поощряет высокие показатели эффективности (что, в свою очередь, не дает завышать собственные затраты). Во-вторых, при наличии прибыли в первом периоде гарантируется возрастание выпуска итогового продукта, что отвечает поставленной задаче о выработке оптимальной политики.

Если начальным положением объединения считать ситуацию на январь 1996 года и выручка, полученная на предыдущем периоде, вся пускается в производство, то получается следующая политика взаиморасчетов и вложений денежных средств в производство.

№	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	Приб.
1	2	3	4	5	6	7	8
1	928.80	1058.80	5413.00	28.75	31.60	10.78	899.28
2	1277.14	1361.03	5661.71	37.95	39.95	11.94	892.65
3	1610.63	1657.50	5924.40	46.45	47.66	12.96	784.64
10	2703.36	2641.41	6900.32	72.94	71.42	15.97	48.65
11	2720.41	2656.79	6916.55	73.34	71.78	16.01	34.12
27	2759.99	2692.49	6954.32	74.27	72.60	16.11	0.11

При помощи написанной программы можно получить полный протокол взаиморасчетов подразделений внутри объединения. Данный результат может быть использован как прогноз – при стимулировании эффективности производства в соответствии с первой схемой распределения прибыли и вложении всей вырученной суммы в производство через 27 временных интервалов будет получен постоянный уровень выпуска итогового продукта в количестве 16.113 млн. штук кирпича в месяц.

3.5. Выводы, полученные на основании рассмотрения модели

Если рассмотреть статистические данные, использовавшиеся для определения коэффициентов производственных функций, то прибыль объединения в каждый период варьировалась от 600 до 1000 тыс. руб. Так, в январе 1996 года она составила 915.4 тыс. руб., в июне – 663.9 тыс. руб. и так далее. В результате решения оптимизационной задачи найдены объемы выпуска продукции каждым подразделением, максимизирующие итоговую прибыль объединения (1484.2 тыс. руб.), что является полутора – двукратным увеличением имевшихся показателей. При этом предлагается сократить выпуск продукции до 6.973 млн. шт. кирпича в месяц, что означает существующую неоптимальность (с точки зрения критерия максимизации прибыли) использования производственных мощностей объединения. Необходимо отметить, что данный результат справедлив только в сложившейся рыночной ситуации, диктующей заданный набор цен на ресурсы и таким образом определяющей замену одних ресурсов на другие, а, следовательно, и внешний вид производственных функций. Очевидно, что положение получения максимальной прибыли является неустойчивым, поскольку использование хоть какой-либо доли полученной прибыли на производственные нужды в следующем периоде приведет к уходу из оптимального состояния системы.

Прогнозное положение максимизации прибыли объединения имеет следующие характеристики:

- возмещения затрат $(x_1, x_2, x_3) = (729.334, 707.180, 2151.057)$;
- произведенная продукция $(y_1, y_2, y_3) = (23.292, 24.265, 6.581)$;
- с учетом транспортных потерь, подразделением перевозки осуществляется закупка извести для перевозки в количестве 1.458 тыс. т. на сумму 53.946 тыс. руб. (по рыночной цене в 37 тыс. руб. за тыс. т.);
- по нормативам расхода на производство 6.581 млн. шт. кирпича расходуется приблизительно 29.61 тыс. тонн извести y_2 (из расчета 4.5 т. извести на 1 тыс. шт. кирпича), то есть предприятие, производящее кирпич, осуществляет покупку извести (с учетом ее доставки сторонним транспортным подразделением) в количестве 5.35 тыс. т. на сумму 390.015 тыс. руб. (по цене 72.9 тыс. руб. за тонну с учетом доставки).

Может показаться, что для получения максимальной прибыли не нужно организовывать какого-либо реального объединения предприятий. Достаточно последнему в производственной цепочке предприятию проводить корректную политику закупки ресурсов и выпуска продукции, а всю прибыль оставлять себе. Это не так, поскольку все предприятия, производящие полуфабрикаты, передавали эти полуфабрикаты по себестоимости (то есть им возмещались только собственные затраты). Если не будет стимулироваться эффективная работа всех членов объединения (не будут выдаваться доли прибыли для поощрения), то всем производителям полуфабрикатов станет выгодно продавать продукцию на сторону для получения прибыли. Кроме того, сам факт передачи полуфабрикатов по производственной цепочке вместе с заявкой на покрытие собственных затрат, без оплаты по факту передачи продукции, требует создания особых форм договорных отношений, которые и могут рассматриваться как образование объединения.

Второй полученный результат связан с выработкой оптимальной политики вложений денежных средств. Данная политика строится на стимулировании эффективности работы участников объединения. Полученная траектория в пространстве состояний системы с дискретным временем может рассматриваться как некоторая предельная политика максимального роста. При использовании части прибыли на непроизводственные нужды рост выпуска продукции будет происходить более медленно.

В результате реализации политики максимального роста в течение двух лет и трех месяцев происходит увеличение выпуска итогового продукта с 12.333 млн. шт. в месяц (в среднем за 1996 год) до положения производственного равновесия 16.113 млн. шт. в месяц – на 30.6%. В этом положении отсутствует прибыль, но гарантировано полное возмещение издержек всем предприятиям, участвующим в объединении. При реализации политики взаиморасчетов, не включавшей объединения предприятий и стимулирования эффективности производства в 1997 году произошел рост выпуска кирпича на 3.5% – до 12.758 млн. шт. в месяц (в среднем за 1997 год), что на 26.3 % меньше, чем прогнозные показатели выпуска, которые могут быть получены при реализации политики максимального роста.

Прогнозное положение производственного равновесия объединения имеет следующие характеристики:

- возмещения затрат $(x_1, x_2, x_3) = (2759.993, 2692.489, 6954.316)$;
- произведенная продукция $(y_1, y_2, y_3) = (74.268, 72.604, 16.113)$;
- отличие количества выработанной извести y_1 от количества перевезенной извести y_2 составляет 2.2%, что соответствует имеющимся данным о потерях при перевозке, то есть покупка и продажа извести подразделением перевозки не производится;
- по нормативам расхода на производство 16.113 млн. шт. кирпича расходуется приблизительно 72.51 тыс. тонн извести y_2 (из расчета 4.5 т. извести на 1 тыс. шт. кирпича), то есть покупка / продажа извести (с учетом ее доставки заказчику и от заказчика) не производится.

В отличие от положения производственного объединения, полученного для максимизации прибыли, данное равновесие производства является в известной степени самодостаточным, то есть не требуется покупка ресурсов со стороны. В результате экономическое положение объединения становится более устойчивым и надежным, поскольку не приходится полагаться на своевременное выполнение обязательств сторонними организациями.

3.6. Недостатки предложенной методики

Главным недостатком данной методики является неполное соответствие производственных и рыночных процессов производственной функции Кобба-Дугласа. Не следует забывать, что данный вид производственных функций лишь аппроксимирует реальные процессы, и полученные решения (оптимальные по какому-либо критерию направления деятельности объединения) могут быть рассмотрены лишь как некоторое приближения к реальным оптимальным направлениям деятельности.

Одним из существенных недостатков в данном случае является отсутствие моделирования сезонных зависимостей. Так, зимой производство извести и выпуск кирпича обычно падают, к лету же – возрастают. Вырабатываемая политика не учитывает таких зависимостей. Кроме того, даже если выпуск в соответствующие периоды производится в соответствии с политикой, то может возникнуть ситуация, когда вся продукция объединения не будет востребована (например, зимой). В другой же период (лето) может возникнуть избыточный спрос и, как результат, упущена дополнительная прибыль. Если же избытки продукта, произведенного в зимний период, хранить до лета, то себестоимость такой продукции может значительно возрасти из-за складских расходов.

Чтобы избавиться от части сезонных зависимостей, можно вычислять коэффициенты производственных функций на основании суммарных годовых статистик. Однако такой метод неприменим к системам с недавно возникшими связями (каковыми являются большинство российских объединений). Многие из результатов, полученных для оцениваемых коэффициентов, являются асимптотическими. Следовательно, и такие результаты, и сами оценки коэффициентов, полученные на основании 2-7 статистик, будут статистически несостоятельными.

При переходе к динамической модели не учитываются остатки денежных средств и ресурсов от предыдущих периодов, которые могут пускаться в производство через несколько месяцев. При разработке такой модели необходимо будет учесть стоимость хранения ресурсов.

Кроме того, в модели никак не учитываются внешние, макроэкономические показатели. Например, не учитывается убывание цены итогового продукта с возрастанием количества его выпуска, связанное с необходимостью предоставлять большие скидки дилерской сети. Возможны ситуации, когда нельзя продавать промежуточные продуты с целью их замены на деньги (например, из-за отсутствия потребителей в данном регионе и больших издержек на перевозки в другие регионы), а можно только их докупать (или наоборот).

Одной из проблем, возникающих при определении оптимальной политики расчетов с участниками объединения, заключается в неединственности положений равновесия производства (отсутствия прибыли и убытка). Так, используя в качестве начального положения системы состояние на январь 1996 года, было получено производственное равновесие с выпуском итогового продукта, равным 16.113 млн. шт. кирпича. Если в качестве начального положения системы использовать состояние, соответствующее максимальной прибыли объединения, то выпуск итогового продукта составит 14.500 млн. шт. кирпича. Кроме количественных показателей, эти положения равновесия отличаются и качественно – во втором случае требуется дополнительная закупка ресурсов на стороне. Подробное описание каждого положения производственного равновесия приводилось ранее.

Фактически, множество положений равновесия производства является поверхностью, ограничивающей множество прибыли. Часть из этих положений равновесия является неустойчивой, часть – устойчивой. С одной стороны, наличие множества положений равновесия приводит к возможности маневрирования производством. С другой стороны, возрастание производства в процессе сходимости к положению равновесия не гарантирует получения максимально возможного выпуска итогового продукта (из всех положений равновесия). Для решения этой проблемы может решаться задача условной оптимизации

$$y_n \to \max_{x_1,\ldots,x_n}$$
$$py_n - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \, .$$

Тем не менее, несмотря на приведенные выше недостатки, рассмотренная модель представляется хорошим средством для приближенного поиска оптимальной политики деятельности объединения и долгосрочного прогноза результатов деятельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аллен Р.Дж.* Математическая экономия. – М., Издательство иностранной литературы, 1963.
2. *Жак С.В.* Математические модели менеджмента и маркетинга. – Ростов-на-Дону, ЛаПо, 1997.
3. *Демченко К.С., Руссман И.Б.* Нахождения положения экономического равновесия в нелинейной балансовой модели затраты-выпуск общего вида. – Сборник научных трудов “Системное моделирование социально-экономических процессов” Воронеж, изд-во ВГУ, 2000.
4. *Каплинский А.И., Руссман И.Б., Умывакин В.М.* Моделирование и алгоритмизация слабо-формализованных задач. – Воронеж, изд-во ВГУ, 1991.
5. *Gill P.E., Murray W., Wright M.H.* Practical optimization. – New York, Academic Press, 1981.
6. *MacKinnon J.G., Davidson R.* Estimation and Inference in Econometrics. – New York, Academic Press, 1995.
7. *White K.J.* SHAZAM Econometrics Computer Program. – Vancouver, Canada, McGrow-Hill Book Company, 1993.
8. *Бурков В.Н., Овчинников С.А. и др.* Оптимизация обменных производственных схем в условиях нестабильной экономики. (Препринт) – М., Институт проблем управления, 1996.
9. *Бурков В.Н., Зинченко В.Н. и др.* Механизмы обмена в экономике переходного периода. – М., Институт проблем управления, 1998.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Баркалов С. А., Демченко К. С., Руссман И. Б.

Модели анализа деятельности производственных объединений
на базе функций Кобба-Дугласа

Препринт

Формат бумаги 60×84/16. Уч.-Изд. л. 3,2.
Тираж 100. Заказ .
117806, Москва, Профсоюзная 65
Институт проблем управления
Им. В.А. Трапезникова